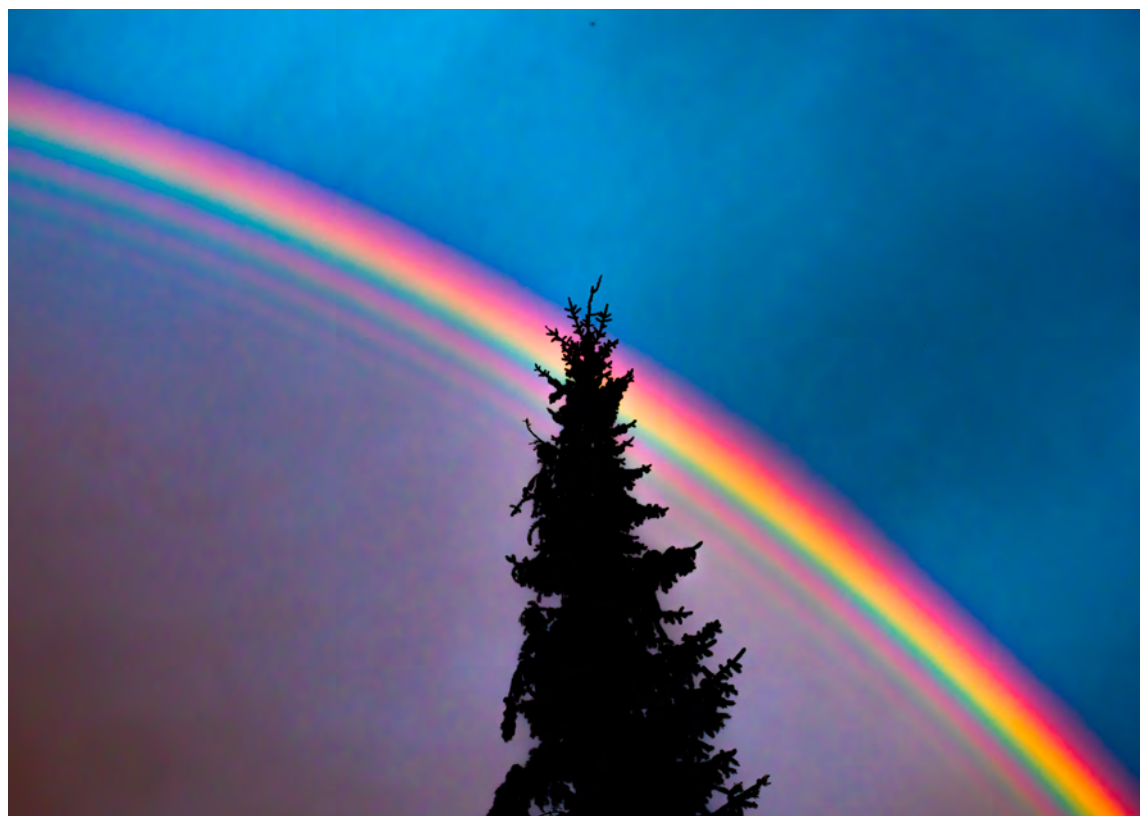


IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

ISSN 0473-7466

2025  
Letnik 72  
1

# OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



# OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije  
Ljubljana, MAREC 2025, letnik 72, številka 1, strani 1–40

**Naslov uredništva:** DMFA Slovenije, Jadranska ulica 19, 1000 Ljubljana **Telefon:** (01) 4766 500 **Elektronska pošta:** zalozba@dmfa.si **Internet:** <http://www.obzornik.si/> **Transakcijski račun:** SI56 0205 3001 1983 664  
**Mednarodna nakazila:** Nova Ljubljanska banka d.d., Ljubljana, Trg republike 2, Ljubljana **SWIFT (BIC):** LJBAS12X **IBAN:** SI56 0205 3001 1983 664

**Uredniški odbor:** Peter Legiša, Sašo Strle, Bojan Kuzma (urednik za matematiko), Aleš Mohorič (tehnični urednik, urednik za fiziko in odgovorni urednik), Mirko Dobovišek, Irena Drevenšek Olenik, Damjan Kobal, Petar Pavešić, Marko Razpet, Nada Razpet, Peter Šemrl.

Jezikovno pregledal Grega Rihtar.

Natisnila tiskarna DEMAT v nakladi 150 izvodov.

Člani društva prejemajo Obzornik brezplačno. Celoletna članarina znaša 25 EUR. Naročnina za ustanove je 60 EUR, za tujino 35 EUR.

DMFA je včlanjeno v Evropsko matematično društvo (EMS), v Mednarodno matematično unijo (IMU), v Evropsko fizikalno društvo (EPS) in v Mednarodno združenje za čisto in uporabno fiziko (IUPAP). DMFA ima pogodbo o recipročnosti z Ameriškim matematičnim društvom (AMS).

Revija izhaja praviloma vsak tretji mesec. Sofinancira jo Javna agencija za znanstvenoraziskovalno in inovacijsko dejavnost Republike Slovenije iz sredstev državnega proračuna iz naslova razpisa za sofinanciranje domačih znanstvenih periodičnih publikacij.

© 2025 DMFA Slovenije

Članki so objavljeni z licenco CC BY-SA

---

## NAVODILA SODELAVCEM OBZORNIKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Revija Obzornik za matematiko in fiziko objavlja izvirne znanstvene in strokovne članke iz matematike, fizike in astronomije, včasih tudi kak prevod. Poleg člankov objavlja prikaze novih knjig s teh področij, poročila o dejavnosti Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije ter vesti o drugih pomembnih dogodkih v okviru omenjenih znanstvenih ved. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, diplomantov iz omenjenih strok.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev), sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo), izvleček v slovenskem jeziku, naslov in izvleček v angleškem jeziku, ključne besede in citirano literaturo. Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo tudi ločeno od besedila. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Prispevki so lahko oddani v računalniški datoteki PDF ali pa natisnjeni enostransko na belem papirju formata A4. Zaželeno velikost črk je 12 pt, razmik med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku ali uredniku za matematiko oziroma fiziko na zgoraj napisani naslov uredništva. Vsak članek se praviloma pošlje dvema anonimnima recenzentoma, ki morata predvsem natančno oceniti, kako je obravnavana tema predstavljena, manj pomembna pa je originalnost (in pri matematičnih člankih splošnost) rezultatov. Če je prispevek sprejet v objavo, potem urednik prosi avtorja še za izvirne računalniške datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov  $\text{\TeX}$  oziroma  $\text{\LaTeX}$ , kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

# KAKO IN ZAKAJ VKLJUČITI ZGODOVINO MATEMATIKE V POUK MATEMATIKE

JURIJ KOVIČ<sup>1</sup>

<sup>1</sup>IMFM, Ljubljana in UP FAMNIT, Koper

Math. Subj. Class. (2020): 01A99

V članku pregledamo nekaj možnih smiselnih uporab zgodovine matematike pri pouku matematike na različnih stopnjah izobraževanja, ki lahko učiteljem služijo kot modeli za podobne, bolj domiselne in kreativne pedagoške obravnave tudi nekaterih drugih matematičnih vsebin; tak pristop je lahko privlačnejši za učence kot pa strogo premočrtni koraki od A to B po shemi definicija – izrek – dokaz.

## INCLUDING HISTORY OF MATHEMATICS IN TEACHING OF MATHEMATICS – HOW AND WHY

In the article we review some possible sensible uses of history of mathematics in teaching mathematics at various levels which can serve to the teachers of mathematics as models for similar, more ingenious and creative pedagogical treatments also of some other mathematical themes; this approach can be more attractive for pupils in comparison with the strict straightforward steps from A to B via the scheme: definition – theorem – proof.

### 1. Uvod

Kaj *zgodovina matematike* (v nadaljevanju na kratko: ZM) sploh je? Pod tem izrazom si po navadi predstavljamo zbiranje, razvozlanje in predstavitev najrazličnejših podatkov oz. ohranjenih virov v zvezi z matematičnimi praksami različnih obdobij, lokacij in kultur, pa tudi kar se da zvesto rekonstruiranje podrobnosti iz življenja velikih matematikov. Kadar je podatkov malo, vrzeli v našem znanju poskuša zapolniti z različnimi legendami, anekdotami, ugibanji itd., ali pa se ukvarja s svojo lastno teorijo in zgodovino (čemur bi lahko rekli: *zgodovina zgodovine matematike*, na kratko: ZZM).

Vendar sta tako faktografija kot samorefleksija le sredstvi, ne pa tudi cilj ZM, ki ni namenjena le zbiranju podatkov in ukvarjanju s samo seboj, ampak je to predvsem podporna in aplikativna veda, ki ob primerni uporabi služi temu, da se matematike (v nadaljevanju na kratko: M) globlje, širše in lažje učimo in jo bolje poučujemo, ter kot raziskovalci uspešneje prihajamo do novih matematičnih odkritij. Prvine ZM so prisotne tudi v znanstvenih matematičnih člankih, kjer avtorji v Uvodu praviloma omenijo relevantne že znane rezultate, v Literaturi pa navedejo reference nanje.

## 2. Komparativna metoda in primeri uporabe ZM pri pouku M

S primerno uporabo ZM lahko M učencem, dijakom in študentom predstavimo na privlačnejši način, tudi za tiste, ki jo sicer a priori dojemajo kot težko, tudi zato, ker so zaradi prenatrpanosti učnih programov izpostavljeni predvsem minimalističnemu, redukcionističnemu pedagoškemu pristopu po shemi: definicija – izrek ali formula – dokaz – primeri – naloge, brez kakršnegakoli zgodovinskega konteksta, ki bi tematiko osmisлил in povezal z drugim, že osvojenim matematičnim znanjem.

Vključevanje ZM v pouk M naravno vodi k uporabi t. i. *komparativne metode*, ki je uveljavljena tudi v drugih vedah, npr. pri študiju primerjalne književnosti na Filozofski fakulteti Univerze v Ljubljani, s katero lahko najboljše prikažemo *evolucijo* in *diverziteto* matematičnih idej, konceptov, simbolov, problemov, struktur, teorij itd. v različnih obdobjih, deželah in kulturah.

Oglejmo si na primerih, kako primerjalna metoda lahko pomaga pri razumevanju M, oziroma kako lahko njena odsotnost takšno razumevanje zavira.

Študentu, ki npr. ne razume najboljše, zakaj je definicija funkcije takšna, kot je – urejena trojica  $(D_f, Z_f, f)$ , ki sestoji iz domene, kodomene in funkcijskega predpisa – bo razumevanje tega pojma bistveno lažje, če mu na kratko predstavimo zgodovino razvoja tega pojma, kaj je npr. ta izraz pomenil Eulerju, ali kako so se nekateri matematiki razburjali, da se med funkcije zdaj štejejo tudi takšne eksotične in strašljive novotvorbe, kot so npr. v vsaki točki zvezne in nikjer odvedljive funkcije.

Če pa, nasprotno, nekdo prvič sliši npr. definicijo grupe, čemur takoj nato sledi sicer logično povsem korektna izpeljava njenih osnovnih lastnosti, vendar brez kakršnekoli motivacije in brez kakršnekoli omembe zgodovinskega konteksta nastanka tega pojma (Galois in njegov dokaz, da polinomske enačbe stopnje pet ali več niso rešljive z radikali) ali vsaj njegovih uporab (npr. za študij permutacij, simetrij, kompozitumov rotacij in zrcaljenj itd.), s takšnim pedagoško neosmišljenim znanjem ne bo zadovoljen.

Priložnost za vsaj občasno, skrbno odmerjeno in domišljeno popestritev pouka M z elementi ZM se učiteljem na vseh stopnjah ponuja dobesedno na vsakem koraku, na primer pri obravnavi številskih množic  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ , kjer lahko poudarimo, da je vsaka razširitev pojma števila sledila isti razvojni logiki: kot so negativna števila omogočila rešljivost vsake enačbe  $a + x = b$ ,  $a, b \in \mathbb{N}$ , tako so racionalna števila omogočila rešljivost vsake enačbe  $ax = b$ ,  $a, b \in \mathbb{Z}$ ,  $a \neq 0$ , in so iracionalna števila nastala iz potrebe rešiti enačbe  $x^a = b$  itd. Obravnavo kompleksnih števil lahko bolj kot zgolj

suhoparna definicija seštevanja in množenja urejenih parov  $(a, b) + (c, d) = (a + b, c + d)$  oz.  $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$  osmisli omemba rešitve naloge  $ab = 40, a + b = 10$ , ki je naravno pripeljala do kompleksnih rešitev ustrezne kvadratne enačbe. Če želimo učencem še bolj razširiti obzorja, jim lahko omenimo znani spor med Cardanom in Tartaglio, ki je lahko tudi izhodišče za etični razmislek, ali je prav, da so matematični izsledki javno dostopni vsem, kar je lepa vzporednica danes aktualnemu vprašanju, ali naj bodo programske kode najrazličnejših spletnih orodij prosto dostopne ali ne. In čeprav bo marsikateri učitelj povsem zadovoljen, če bodo njegovi učenci znali reševati osnovne računske naloge, jim potem lahko pokaže tudi kakšne zanimive uporabe kompleksnih števil v geometriji, npr. za dokaz Napoleonovega izreka ali za dokaz izreka, da znamenite tri točke trikotnika ležijo na isti premici, kar je računsko dokazal že Euler na ta način, da je izračunal njihove koordinate. Veljavnost ustreznega izreka lahko pred tem učenci intuitivno preverijo tudi z orodji dinamične geometrije (npr. GeoGebro) in tako bo pouk M uspešno povezal ZM in napredne tehnologije, kar je takor ekoč idealna formula za pritegnitev pozornosti učencev.

Vselej velja učence opozoriti na širši kontekst obravnavane snovi. Ko npr. obravnavamo infinitezimalni račun, ni dovolj dijake izuriti le v računanju odvodov in integralov ali študentom vbiti v glave t. i. "epsilon-delta" definicije limite in zveznosti ter jih naučiti korektno uporabiti Newton-Leibnizevo formulo, ampak jih je smiselno opozoriti tudi na to, kako zelo je M napredovala, ko je začela obravnavati spremenljive pojave in količine, kot so npr. hitrost, pospešek itd., in da so diferencialne enačbe v bistvu jezik za opisovanje in raziskovanje spremenljivih pojavov v naravi in družbi.

Eno temeljnih pedagoških sporočil ZM je, da se M nenehno (danes še posebej pospešeno) spreminja in razvija, kar je močan argument za to, da je smiselno vsaj del pouka M posvetiti tudi procesu njenega nastajanja, ne le nekemu končnemu naboru njenih formul, izrekov, računskih metod itd. Danes, ko so celo na spletu že odprto dostopna računalniška orodja, ki uspešno rešujejo ne le preproste računske naloge, kot je npr. množenje matrik, ampak tudi naloge z matematičnih olimpiad in univerzitetne izpitne naloge, ne moremo več vztrajati, da se nove generacije učijo M na enak način kot v prejšnjem tisočletju. Poudarek ne more biti samo na memoriranju, računanju, dokazovanju in reševanju nalog, saj vse to t. i. *umetna inteligenca* že počenja bolje od človeka. Pri pouku M moramo danes razvijati predvsem našo *naravno inteligenco*, ki zmore tudi zastavljati originalna smiselna vprašanja, odkrivati nove probleme, kritično primerjati različne metode, ustvarjalno spreminjati matematične modele realnih pojavov v svetu

itd. Od učencev na vseh stopnjah ne smemo več zahtevati le reprodukcije v kurikulumu določenega matematičnega znanja, formul in metod, ampak moramo spodbujati tudi njihovo radovednost, kritičnost in ustvarjalnost. Ker M ni le skupek formul, izrekov in metod, ampak ima tudi zgodovinsko, aplikativno dimenzijo, njen vpliv pa se danes širi na vse pore družbe, lahko zlasti bolj družboslovno in manj naravoslovno usmerjene učence pritegnemo k M tudi na ta način, da jih spodbujamo in navajamo k branju matematičnih revij in knjig, skupnem reševanju lažjih matematičnih problemov v manjših skupinah, pisanju kratkih esejev o M ali ZM ipd.

Reševanje eksotičnih starih matematičnih nalog zaradi njih samih zgreši smisel ZM, saj je za samo učenje M enako neproduktivno kot brskanje za biografskimi podatki, ki sami po sebi niso pomembni za razumevanje razvoja M (tako kot npr. poznavanje življenja skladateljev ne pomaga bolje razumeti njihove glasbe, ampak je lahko celo moteče). ZM daje M širši kontekst, tako kot v glasbi harmonija podpira melodijo, ali kot v slikarstvu barve obogatijo risbo. Reševanje starih, za današnje standarde trivialnih besedilnih matematičnih nalog, npr. babilonskih, ki se z uporabo osnovne algebre prevedejo na reševanje linearnih enačb, je za učence praviloma težko, saj so praviloma zapisane v gostobesednem jeziku in brez današnjih matematičnih simbolov. Če jih že vključimo v pouk, potem prikažimo tudi njihove izvirne rešitve (dobljene brez algebre). Ob tem pa je smiselno učence opozoriti na dejstvo, da Babilonci niso podajali splošnih algoritmov, ampak samo rešitve konkretnih številskih primerov, iz katerih so morali učenci sami razvozlati splošno pravilo za reševanje nalog podobnega tipa. Kot učitelji moramo biti fleksibilni, saj imajo nekateri učenci raje pristop od spodaj navzgor (od konkretne rešitve do formulacije splošnega pravila), drugi pa od zgoraj navzdol (od splošnega pravila h konkretnim uporabam tega pravila).

### 3. Zakaj vključiti ZM v pouk M?

Za smiselnost vključevanja ZM v pouk M govorijo številni razlogi:

1. *Pretehtana vgradnja elementov ZM v pouk posameznih matematičnih vsebin lahko pripomore k boljšemu razumevanju M.* To je eden od bistvenih poudarkov iz zbornika *Using History to Teach Mathematics* [3], katerega avtorji so do svojih splošnih spoznanj, ki jih utemeljujejo s konkretnimi opažanji, prišli skozi prakso, prek lastnih izkušenj v razredu. Za vzorec navedimo le en citat: *“Uporaba ZM kot uvoda v kritični in kulturološki študij matematike je eden najpomembnejših izzivov za učitelje M in za študente. Obstaja veliko možnosti za uporabo zgodovine v matematičnem izobraževa-*

nju. Ob reševanju starih problemov lahko učenci primerjajo svoje strategije z originalnimi. To je zanimiv način, kako lahko razumejo ekonomičnost in učinkovitost naših sedanjih algebraičnih metod. Z opazovanjem zgodovinske evolucije določenega matematičnega koncepta se učenci naučijo, da  $M$  ni nekaj fiksnega in dokončnega." Lucia Grugnetti: *The History of Mathematics and its Influence on Pedagogical Problems* ([3], 29–35).

2. *ZM prinese v pouk  $M$  tudi humanistično in kulturno dimenzijo.* S svojim poudarjanjem njenega evolucijskega vidika širi zavedanje, da nenehno razvijajoči se univerzum  $M$  ne obstaja sam po sebi kot idealna kreacija čistega uma v Platonovih nebesih, ampak je skupna stvaritev ljudi različnih obdobj in kulturno-zgodovinskih okolij, ki se glede svojih teorij in prvenstva pri odkritjih dostikrat silovito prepirajo (kot npr. Tartaglia in Cardano zaradi objave formul za reševanje enačb 3. stopnje, ali Newton in Leibniz glede prvenstva pri odkritju infinitezimalnega računa), spori glede kontroverznih vprašanj pa lahko trajajo tudi po več stoletij. Spomnimo se npr. na silovito kritiko škofa Berkeleyja, s katero je v delu *The Analyst* iz leta 1734 opozoril na logične nedoslednosti in protislovja, skrita v pojmu infinitezimalno majhnih količin, kot jih je uporabljal Newton. Šele stroga Weierstrassova "epsilon-delta" formulacija, ki vključuje še eno tehnikalijo, in sicer pojem limite, in ki povzroča študentom toliko težav, je postavila infinitezimalni račun na čvrste temelje. Vendar zgodbe tu še ni konec: nestandardna analiza Abrahama Robinsona (1918-1974) je na sceno vrnila in povsem rehabilitirala neskončno majhne količine s paradokso lastnostjo, da so večje od 0, a manjše od poljubnega pozitivnega števila, in priskrbelo strogost dokazom matematične analize v izvornem Newtonovem duhu ([1], 237-254).

3. *Poskus spoznati in razumeti delo matematikov daljnih časov in dežel nas osvobodi iz ujetosti v zmotno paradigmo o eni sami možni (zahodni)  $M$ .* Matematiki, ki so uporabljali drugačno matematično simboliko (ali je sploh niso!), ki so imeli na voljo drugačna računska orodja in drugačen nabor matematičnih orodij, ki so uporabljali drugačne načine dokazovanja, računanja in sklepanja, in ki so jim celo osnovni koncepti, kot npr. število, funkcija, dokaz, pomenili nekaj drugega kot nam, nam dostikrat predstavljajo pravi detektivski oz. rekonstrukcijski izziv. Tako je npr. v [3] lepo pokazano, kaj vse lahko iz matematičnega teksta sklepamo o njegovem piscu. Praviloma takšno delo zahteva *interdisciplinarni pristop* in (npr. v srednji šoli) ponuja lepo priložnost za *medpredmetno sodelovanje* ( $M$ , fizika, zgodovina, tuji jeziki itd.). Je tudi odlična vaja v *strpnosti do drugače mislečih*.

4. *Zgodovinske osvetlitve evolucije  $M$  lahko spodbudijo radovednost učen-*

cev. Samo v okviru takšnega širšega humanističnega pristopa k pouku M, ki se ne omejuje na suhoparno nizanje definicij, izrekov in dokazov, ampak priznava in integrira v zavedanje tudi neštete druge njene dimenzije, je sploh mogoče učence spodbuditi, da razmišljajo o vprašanjih, kot so: “*Zakaj je nastal določen koncept? V kakšnih zgodovinskih okoliščinah?*” ([3], str. 29).

5. *Videti M v njenem nastajanju, kot dinamično, nenehno spreminjajočo se stvaritev, na razvoj katere vplivajo tudi družbene razmere, v katerih nastaja, pripomore k njenemu boljšemu razumevanju.* Zelo poučno je videti, kako se pomen matematičnih pojmov s časom spreminja, razširja, se izčiščuje, zori. Podobno velja za matematične metode (npr. pri reševanju sistemov linearnih enačb z veliko enačbami in neznankami ni vseeno, katero metodo uporabimo za reševanje z računalnikom). Številni izreki in formule imajo veliko različnih dokazov, ki uporabljajo zelo različna orodja (npr. Pitagorov izrek, Eulerjeva poliedrska formula). Zgodovina nas uči, da M, natanko tako, kot to velja tudi za vse druge znanosti, ni nekaj statičnega, za vekomaj kristaliziranega v nekem aksiomatskem sistemu (kot so matematiki npr. verjeli za evklidsko geometrijo, dokler niso odkrili neevklidskih geometrij). In celo že samo opazovanje znanja, kritično premišljanje o njem, kaj šele govorjenje in pisanje o njem, nekaj dodaja k temu znanju. “*Zgodovinska analiza pomaga učiteljem razumeti, zakaj je določen koncept težak za učence, in jim pomaga pri didaktičnem pristopu in razvoju tematike*” ([3], str. 30).

6. *Vpeljava elementov ZM v pouk M lahko naredi M privlačnejšo za bolj humanistično naravnane učence.* Po razcvetu starogrške M je družbeno in intelektualno statični srednji vek v Evropi močno zavrl razvoj M, ki se je spet razmahnil šele po renesansi. Dinamične spremembe v družbi so posredno spodbudile tudi raziskovanje sprememb z matematičnimi sredstvi, npr. s pomočjo infinitezimalnega računa. Veliko moderne M je tesno povezane z razvojem računalnikov po drugi svetovni vojni, pa s potrebami prometa, na-ravovarstva, informatike itd. Pri pouku M na vseh nivojih bi morali razmišljati tudi o etičnih dimenzijah različnih uporab M, ki že dolgo ni več “čista” znanost, ponosna na svojo neuporabnost (kot je npr. verjel še Hardy, vsaj za teorijo števil, v svoji *Matematičkovi apologiji*). Vsaj občasno pisanje esejev o teh temah, ki spodbujajo kritično razmišljanje, namesto nenehnega duhamornega računanja in reševanja nalog – ki jih za povrh danes že lahko v trenutku rešujejo računalniki, tako kot so kalkulatorji pred nekaj desetletji poenostavili računanje – bi lahko približalo M tudi bolj humanistično kot naravoslovno orientiranim učencem, dijakom in študentom. Pouk M bi danes lahko in moral služiti ne le urjenju v duhamornem računanju, ampak



predvsem razvijanju še drugih, kompleksnejših veščin, potrebnih v današnjem svetu. Le tako vzgajani raziskovalci M bodo lahko ravnali podobno etično kot Leonardo da Vinci, ki je ob odkritju nekaterih svojih bojnih strojev sklenil, da jih raje ne bo javno objavil, zaradi človeške narave, ki teži k nenehnim nesmiselnim spopadom. Raziskovalci M imajo namreč odgovornost pred človeštvom in naravo, kaj raziskujejo, pa če se tega zavedajo ali ne. Uporaba M v vojne namene je nedopustna zloraba človekove intelektualne moči, ki uničuje tudi naravo in planet, na katerem živimo. Nekaj civilizacij je že propadlo zato, ker se niso zavedale nevarnosti tehnologije, ki so jo bile sposobne razviti tudi po zaslugi M, za njihov lasten obstoj. Je to torej res tema, ki jo v pouku M lahko enostavno prezremo, kot to (po vsem svetu) počnemo sedaj?

7. *Vključevanje ZM v pouk M pa je treba vselej izpeljati zelo pozorno. Najprej moramo kot učitelji marsikaj vedeti o ZM, da jo lahko smiselno vključimo v pouk M. Zgodovina ima lahko tudi negativen vpliv na didaktiko, saj ponuja veliko zanimivih in nenavadnih informacij, ki pa dejansko niso bistvene in ne pripomorejo k razumevanju pri pouku obravnavane matematične vsebine. Dobro se je zavedati nekaterih tipičnih napak, ki jih pogosto delajo zgodovinarji M, zato da ne bomo nekritično ponavljali in širili njihovih zmotnih mnenj. Ena od njih je npr. zmotno sklepanje, da je nekdo dejansko že odkril trditev A, ki pa mu je v resnici ostala skrita, čeprav je že prišel do trditve B, iz katere se jo da (oz. jo znamo danes) hitro izpeljati. O tem govori tale citat: “Eno od mnogih tveganj pri vpeljavi ZM v matematično izobraževanje je anahronizem, ki sestoji v tem, da pripišemo avtorju takšno zavestno znanje, ki ga nikoli ni imel. Ogromna razlika je med tem, če prepoznamo Arhimeda kot predhodnika integralnega in diferencialnega računa, čigar vpliv na utemeljitelje tega računa je komaj mogoče preценjevati, in fantaziranjem, da lahko v njem vidimo, kot so to nekateri storili, zgodnjega praktikanta tega računa. Če je tveganje anahronizma veliko za zgodovinarje, ni manjše tudi pri vključevanju ZM v pouk M.”([3], str. 29.)*

#### 4. Dolga tradicija uporabe ZM pri poučevanju M

Ideja uporabe ZM pri poučevanju M nikakor ni izum zadnjih desetletij XX. stoletja, ko so jo, po številnih člankih in knjigah na to temo, ki so redno izhajali skozi vse XX. stoletje, začeli bolj množično tudi praktično preizkušati na različnih koncih sveta in na različnih ravneh, od osnovnih do srednjih šol in univerz, rezultate različnih tovrstnih projektov pa so poizkušali tudi

kritično ovrednotiti. Danes je zainteresiranemu učitelju na voljo že obilica literature, pa tudi spletnih učnih orodij in slikovnega gradiva, iz katere lahko črpa navdih za obogatitev pouka v razredu z uporabo ZM. Uporabi lahko npr. *anekdote* (verodostojne ali nepreverjene) o znanih matematikih, ali *stare matematične naloge* (morda v kombinaciji z modernimi računalniškimi orodji, ki po vzoru starih nalog generirajo nove, za vsakega učenca z drugačnimi parametri), pa tudi krajše ali daljše *odlomke iz originalnih tekstov*, knjig, člankov ali korespondence, ali iz biografij matematikov, ki jih sicer učenci spoznajo le po imenu kakšne njihove formule ali izreka. Kot ugotavlja Siu Man-Keung z Univerze v Hong Kongu: “*Zavedanje tega evulcijskega vidika M lahko naredi učitelja bolj potrpežljivega, manj dogmatskega, bolj človeškega, manj pedantnega*” ([3], str. 8).

Matematična misel v tesni povezavi z jezikom in pisavo ter matematičnimi simboli, s pomočjo katerih je zabeležena oziroma zakodirana vselej zrcali duha določene kulture in časa, v kateri je nastala oziroma se je oblikovala. Že Platon pa je opozarjal, da je živa, govornjena beseda, ustrežnejši izraz misli, kot zapisana beseda, ki je ne moreš nič vprašati, in je tako le njena bleda in molčeča senca. Vendar so pisni viri, vsaj do pojava modernih tehnologij zapisovanja zvoka in gibljivih slik, praktično edino, kar imamo na voljo za preučevanje M preteklosti (še vedno pa so npr. zgodovinarji starogrške M veliko na boljšem kot zgodovinarji starogrške glasbe, ki so jo zapisovali s črkami njihove abecede, in od katere je ohranjenih praktično le nekaj drobcov, npr. Seikilov epitaf – pesem z njegovega nagrobnega spomenika).

M preteklosti pa nikakor ni bila le stopnica k današnji, avtomatično višji stopnji, ampak je bila v marsičem precej drugačna od tistega otočka v ogromnem oceanu M, ki ga poznamo mi. Matematiki prejšnjih časov in drugih kultur niso uporabljali le drugačnih *matematičnih simbolov* in drugačnih raziskovalnih in pedagoških *metod*, ampak so se ukvarjali tudi z drugačnimi *problemi*. Če so npr. renesančni arhitekti in umetniki študirali *linearno perspektivo*, so to počeli predvsem zaradi njene praktične uporabe v slikarstvu; in če so matematiki nekaj stoletij kasneje na tej osnovi zgradili *projektivno geometrijo*, je bila motivacija za to bistveno drugačna.

Zavedati se moramo tudi, da se je *pomen* posameznih matematičnih pojmov skozi zgodovino spreminjal: pomena besed, ki jih je uporabljal npr. Descartes, ne moremo nekritično avtomatsko enačiti s pomenom istih besed v današnjem času, ne moremo jih torej dognati le s sodobnimi francosko-slovenskimi ali latinsko-slovenskimi slovarji (kaj šele z google prevajalnikom), ampak moramo dejansko vedeti, kaj so te besede pomenile tedaj. Ko

presojamo delo matematikov preteklosti, se moramo zavedati, da določenih metod (npr. algebraičnih), ki jih poznamo danes, takrat niso imeli na razpolago. Probleme so reševali drugače, pa tudi zastavljali in razumevali so jih drugače, poudarjali so druge njihove vidike, kot jih vidimo mi oz. so zanimivi za nas. Posledično lahko vidimo, da koncept težavnosti (matematičnih) problemov, ki naj bi objektivno merila razdaljo od problema do rešitve, npr. s štejetjem elementarnih korakov, potrebnih za to, da pridemo do cilja, ni nekaj povsem absolutnega, neodvisnega od reševalca; odvisna je od uporabljenih metod in dovoljenih ali razpoložljivih orodij ter predznanja, inteligence, domiselnosti in domišljije, s katerimi razpolaga reševalec. Tako npr. nekateri dokazi evklidske geometrije, ki razpolaga le z najosnovnejšimi orodji, niso prav nič elementarni, po drugi strani pa nekateri dokazi v višji M niso posebej zapleteni, saj so tam na voljo zelo močna orodja, ki dokaze zelo poenostavijo, seveda šele potem, ko se jih naučimo uporabljati. Primerjava starejših in novejših metod reševanja po eni strani učencem nazorno pokaže, da se da iste probleme reševati na različne načine, po drugi strani pa jim osmisli učenje novejših metod, ki jih lahko potem bolje razumejo in tudi cenijo kot izboljšave starejših, manj učinkovitih.

Domiselne metode dokazovanja geometrijskih izrekov in algebraičnih formul s pomočjo diagramov in 3D-modelov geometrijske algebre (npr. za dokaz formule  $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ ) najdemo na različnih koncih sveta, npr. pri Babiloncih in starih Kitajcih, pa tudi pri arabskih matematikih srednjega veka. Te nešablonske metode (oz. trike, unikatno prilagojene konkretnim posameznim problemom) lahko učencem osnovnih in srednjih šol predstavimo kot zanimive alternative danes prevladujočim univerzalnim metodam, s pomočjo katerih je načeloma mogoče rešiti vse probleme določene vrste. Tako lahko danes veliko geometrijskih problemov rešimo celo na več načinov, ki ne zahtevajo posebnega, konkretnemu problemu na kožo pisanega dodatnega razmisleka: z uporabo kompleksnih števil, analitične geometrije, pa tudi vektorjev in matrik. Poučno je spoznati npr. različne dokaze Morleyevega izreka (odkrita 1899, dokazanega pa 15 let kasneje), ki pravi: *“Če v poljubnem trikotniku razdelimo vse kote na tri dele, se sosednji kraki tretjinskih kotov sekaajo v ogliščih enakostraničnega trikotnika.”*

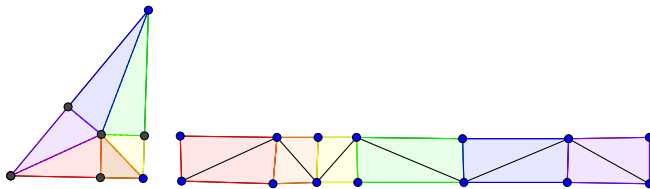
### 5. Kako danes vključiti ZM v pouk M?

Zdaj si lahko zastavimo temeljno pedagoško vprašanje: *Ali želimo svoje učence, dijake, študente naučiti le splošnih, široko uporabnih računskih metod oziroma algoritmov, ki jih bodo sposobni izvesti gladko in tako rekoč brez*

*razmisleka, ali pa jih želimo spodbujati tudi k nešablonskemu, spontanemu razmišljanju in sledenju intuiciji onstran utečenih splošnih metod?* Učenci, poučevani po prvi (bolj pragmatični) metodi, bodo po najhitrejši poti prišli od točke A do točke B, medtem ko bodo učenci, poučevani po drugi (bolj filozofski) metodi poizkušali najti izvirno rešitev. Ta dilema ni nekaj novega: v ZM poznamo prerekanja med zagovorniki Descartesovih analitičnih in starejših sintetičnih metod v geometriji; prve poenostavijo reševanje nalog, druge pa zahtevajo bistrumne rešitve, prilagojene vsaki nalogi posebej. Zanimivo analogijo dilemi, ali slediti utečenim načinom reševanja ali razmišljati na izviren način, zasledimo tudi v šahu: t.i. šahovski hipermodernisti so se v začetku XX. stoletja odločno zoperstavili idejam o tem, da je vrhunski šah mogoče igrati po nekih pravilih (npr. tistih, ki jih je formuliral Steinitz, in so sicer pomenili veliki prispevek k šahovski teoriji in praksi). Tako je npr. vele mojster Richard Reti dejal: *“Zanimajo nas izjeme, ne pravila!”*

Obilico primerov prav takšnega, prvinskega, nešablonskega razmišljanja odkrijemo tudi v M, če raziskujemo matematične naloge in njihove originalne rešitve. Prav takšen svež pristop ohranja matematično misel živo in večno nepredvidljivo. Ne glejmo torej na stare naloge in davne M zviška, ker npr. niso poznali niti formule za kvadratno enačbo, in so vsako nalogo morali rešiti na drugačen, izviren, domiseln način. Eleganca splošnih, do avtomatizma naučenih metod iz zavesti večine matematikov žal izbriše bistrumne rešitve, ki so idealno prilagojene danemu konkretnemu problemu, prav zato pa delujejo le v zelo redkih ali celo le v posameznih primerih! Vzemimo si za zgled vrhunske šahiste, ki so že spoznali, da mora strateško razmišljanje potrditi konkreten taktični izračun potez v dani poziciji in sistematično pregledovanje drevesa vseh možnih relevantnih variant. Podobno, rešitve res težkih matematičnih problemov praviloma zahtevajo izum nestandardnih, izvirnih metod. Torej je učence, dijake in študente smiselno uriti tudi v tovrstnem matematičnem razmišljanju, ne toliko zato, da bi spoznali posamezne eksotične matematične naloge iz preteklosti, ampak da bodo kasneje, kot raziskovalci (na kateremkoli področju, ne nujno na področju M), bolje usposobljeni za reševanje novih, nešablonskih problemov, ki jih pred nas postavlja naš dinamični in hitro spreminjajoči se svet. Po drugi strani pa je smiselno pri pouku M predstaviti tudi določene splošne metode iz ZM, drugačne od tistih, ki jih sicer uporabljamo mi, in spodbuditi debato o prednostih in pomanjkljivostih različnih metod. Ena od široko razširjenih metod po vsem svetu je takšna ali drugačna uporaba vizualnih pripomočkov. Tako je npr. Liu Hui, eden od velikih matematičnih

komentatorjev in matematikov stare Kitajske, svojim bralcem svetoval, naj rišejo na papir diagrame in režejo ter preurejajo koščke ter tako dokazujejo matematične trditve. Za Kitajce je bilo rezanje in zgibanje papirja splošno sprejeta metoda matematičnega dokazovanja [2]. S to metodo je npr. mogoče preprosto pokazati, da je radij  $r$  kroga, včrtanega pravokotnemu trikotniku s katetama  $a, b$  in hipotenuzo  $c$ , enak  $r = \frac{ab}{a+b+c}$ . Opis rešitve: Iz središča  $S$  trikotniku včrtanega kroga narišemo daljice  $SA, SB, SC$  do oglišč  $A, B, C$  ter pravokotnice na stranice  $a, b, c$ , ki skupaj razdelijo trikotnik na šest pravokotnih trikotnikov z višino  $r$ . Iz dveh kompletov takšnih koščkov pa lahko sestavimo pravokotnik s stranicama  $r$  in  $a + b + c$  (Slika 1). Torej je  $2 \cdot \frac{ab}{2} = (a + b + c)r$ .



Slika 1: Geometrijska utemeljitev formule  $r = \frac{ab}{a+b+c}$ .

Takšni preprosti, nazorni dokazi, ki jih mrgoli tudi v knjigah t. i. razvedrilne matematike, so našli svojo tržno nišo celo v resnih matematičnih revijah, najdemo jih npr. v rubriki *Proofs without words* v reviji Math Magazine.

ZM je le material, iz katerega učitelj M ali pisec matematičnega članka ali knjige naredi zgodbo, podobno kot ravna pisatelj, ki uporabi resnične dogodke in osebnosti le kot gradnike, iz katerih sestavi svojo zgodbo; v literarni teoriji je sicer vpeljana jasno razlikovanje med *fabulo* – zgodbo samo, in *naracija* – načinom njene pripovedi. V tem smislu je naloga učitelja M podati poučno zgodbo na privlačen način, s smotrno uporabo elementov ZM.

## LITERATURA

- [1] Davis, J. Philip and Hersh, Reuben, The Mathematical Experience, Birkhäuser, Boston 1981.
- [2] Siu, M. K., *Proof and Pedagogy in Ancient China – Examples from Liu Hui’s Commentary on Jinhang Suanshu*, Educational Studies in mathematics (1993) 24: 345–357.
- [3] *Using History to Teach Mathematics, An International Perspective*, Victor Katz, Editor, MAA Notes 51, The Mathematical Association of America, 2000.

# LEGA MAVRIČNIH LOKOV

DUŠAN HVALICA<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Ekonomska fakulteta Univerze v Ljubljani

Ključne besede: mavrica, tretji mavrični lok

Podana je razlaga, zakaj obstaja več lokov mavrice in zakaj jih vedno vidimo pod enakimi koti glede na smer sončnih žarkov.

## THE POSITION OF RAINBOW ARCS

We provide an explanation, why there are several rainbow arcs and why they always appear at specific angles offset to the direction of light rays.

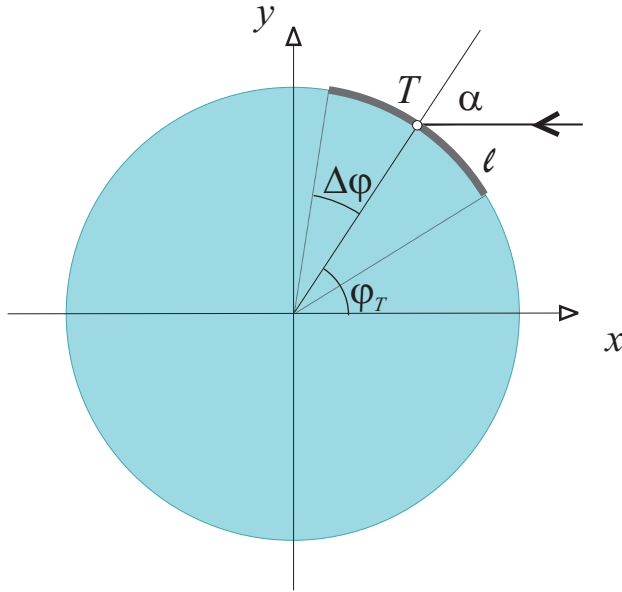
Vsakdo pozna mavrico, pa vendar ima ta tudi lastnosti, ki niso splošno znane – ena izmed njih, polariziranost svetlobe v mavričnem loku, je bila že obravnavana v Obzorniku[1]. Redki tudi vedo, da poleg dveh mavričnih lokov obstajajo še tretji, četrti, pa tudi nadaljnji loki. Zaradi njihove šibke svetlosti in še nekaterih drugih motečih dejavnikov jih je namreč mogoče opaziti izjemno redko – fotografija tretjega loka je uspela šele leta 2011[2]. Ogledali si bomo, kako ti loki nastanejo in pod kakšnimi koti so vidni.

Ko se vodna kapljica kondenzira, ima zaradi površinske napetosti obliko krogle. Pri padanju so kapljice izpostavljene silam zaradi zračnega upora, a če premer kapljice ne presega 1 mm, so te sile v primerjavi s površinsko napetostjo zanemarljive, zato kapljica obdrži obliko krogle[5][6]. Če je kapljica večja, dobi obliko sploščenega rotacijskega elipsoida, ki z naraščajočim premerom postaja še dodatno ploščat na svoji spodnji strani. Dežne kapljice so torej različnih oblik, kot pa bomo videli, so za pojav mavrice zaslužne kapljice, ki so okrogle. Zato bomo v nadaljevanju privzeli, da ima dežna kapljica obliko krogle.

Ko sončni žarek zadene dežno kapljico, se pri prehodu v notranjost najprej lomi, potem se znotraj kapljice enkrat ali večkrat odbije, ko zapusti kapljico, pa se spet lomi. Žarek do točke  $T$ , kjer doseže kapljico, skupaj s spojnico točke  $T$  in središča kapljice napenja ravnino, v kateri žarek ostane tudi po lomu oziroma odbojih znotraj kapljice. Za opis dogajanja torej zadošča obravnavati preseka kapljice s to ravnino. Če v njej postavimo koordinatni sistem tako, da je izhodišče v središču kapljice, os  $x$  pa kaže v smeri proti Soncu, je kot, ki ga sončni žarek oklepa z normalo na površino kapljice v točki  $T$ , kjer žarek doseže kapljico, enak polarni koordinati  $\varphi_T$  točke  $T$ .

Vzemimo, da je kot, ki ga izhodni žarek oklepa s smerjo proti Soncu (se pravi z  $x$ -osjo), opisan s funkcijo  $f(\alpha)$  (kjer je  $\alpha$  vpadni kot).

## Lega mavričnih lokov



**Slika 1.** Ravninski presek vodne kapljice

Oglejmo si, kam kažejo izhodni žarki, ki ustrezajo sončnim žarkom, ki zadenejo kapljico v točkah loka  $l$ ! Te točke ustrezajo vpadnim kotom  $\alpha \in (\varphi_T - \Delta\varphi, \varphi_T + \Delta\varphi)$ . Kot, ki ga tak izhodni žarek oklepa z  $x$ -osjo, je enak  $f(\alpha)$  in zato leži na intervalu  $(f(\varphi_T) - \Delta f, f(\varphi_T) + \Delta f)$ , kjer je

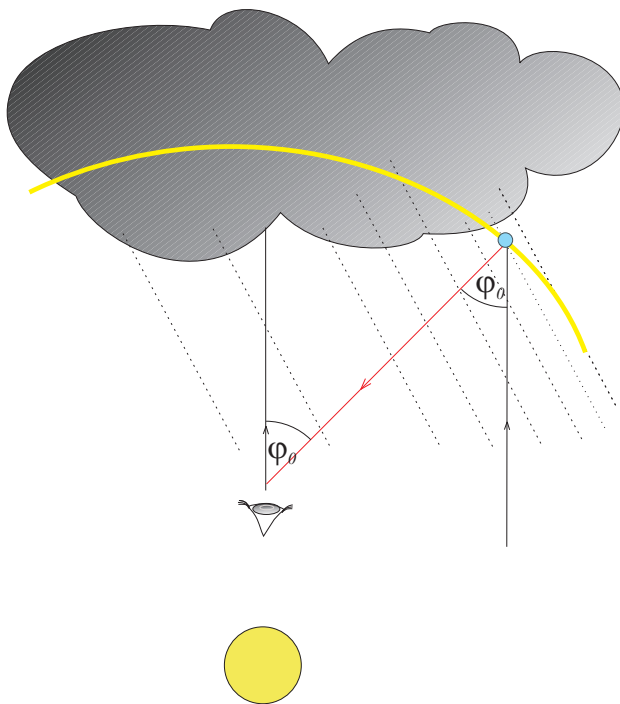
$$\Delta f \sim f'(\varphi_T) \cdot \Delta\varphi.$$

Manjši ko je odvod  $f'(\varphi_T)$ , manj se za žarke, ki zadanejo lok  $l$ , smeri izhodnih žarkov razlikujejo med seboj – če bi jih vzporedno premaknili tako, da bi izhajali iz iste točke, bi vsi ležali v kotu velikosti  $2f'(\varphi_T) \cdot \Delta\varphi$ .

Če je  $\varphi_T$  stacionarna točka funkcije  $f(x)$ , je  $\Delta f \sim 0$ , v tem primeru so zato smeri izhajajočih žarkov približno enake za vse točke loka  $l$ . Šopu vzporednih sončnih žarkov, ki pokrijejo lok  $l$ , zato ustreza (skoraj) vzporeden šop izhodnih žarkov, ki sijejo (približno) v smeri, ki s smerjo proti Soncu oklepa kot  $\varphi_0 = f(\varphi_T)$ . Kdor pogleda v nasprotni smeri, vidi zato enako (le obrnjeno) sliko, kot če bi z mesta dežne kapljice pogledal proti Soncu (ker se vse opisano dogaja v ravnini, seveda velja vse povedano le za to, kar vidimo skozi zaslon z rezo, ki leži v tej ravnini). Ta nasprotna smer je v obravnavani ravnini okarakterizirana s tem, da oklepa kot  $\varphi_0$  s smerjo

stran od Sonca (glej sliko 2).

Opisano velja za vsako ravnino skozi središče dežne kapljice, ki je vzporedna smeri proti Soncu in za vsako dežno kapljico, na katero pada sončna svetloba. Vsaka vodna kapljica, obsijana s soncem, zato del svetlobe, ki pade nanjo, preusmeri v smeri vsakega poltraka, ki s smerjo proti Soncu oklepa kot  $\varphi_0$ . Če se v neki smeri od opazovalca, ki s smerjo stran od Sonca oklepa kot  $\varphi_0$ , nahaja vodna kapljica, obsijana s soncem, zato ta kapljica del sončne svetlobe, ki pade nanjo, preusmeri tudi v smeri proti opazovalcu, zato je zanj svetloba iz te smeri veliko svetlejša kot iz drugih smeri, iz katerih prihaja le običajna dnevna difuzna svetloba. Če do tega pride tudi v drugih smereh, ki s smerjo stran od Sonca oklepajo kot  $\varphi_0$ , vidi to opazovalec kot svetel krožni lok, ki sega, do koder se nahajajo dežne kapljice, obsijane s soncem.



**Slika 2.** Nastanek loka mavrice

To pa še ni vsa zgodba. Za svetlobe različnih valovnih dolžin se namreč lomni količnik vode nekoliko razlikuje – za rdečo znaša 1.331, za vijolično 1.344, za ostale spektralne barve se vrednosti zvrstijo vmes. Kot bomo



videli, je količina  $f(\varphi_T)$  zvezno odvisna od lomnega količnika. Ker vse povedano velja za vsako spektralno barvo posebej, ustreza zato vsaki barvi svetel lok v tisti barvi, ki ga vidimo pod malo drugačnim kotom, kot druge barve, skupaj pa ti loki tvorijo znano mavrico.

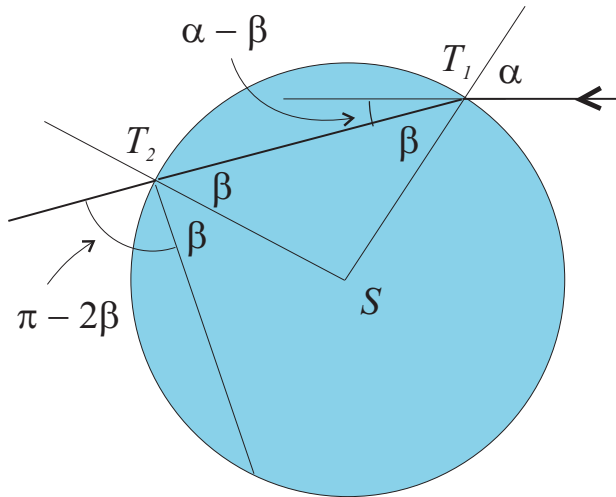
Kot je bilo že uvodoma rečeno, vse dežne kapljice niso okrogle. Iz tega, kar je bilo doslej povedano, pa je jasno, da za nastanek pojava mavrice zadošča, da so med njimi prisotne tudi okrogle kapljice. Seveda pa velja: večji ko je delež okroglih kapljic med njimi, močnejši oziroma izrazitejši je pojav.

Oglejmo si zdaj, kaj se zgodi s sončnim žarkom na poti skozi dežno kapljico!

Najprej se pri prehodu iz zraka v vodo žarek lomi v skladu s Snellovim zakonom: kota  $\alpha$  in  $\beta$ , ki ju vpadni in lomljeni žarek oklepata z normalo na vodno površino, sta v zvezi

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n \quad (1)$$

(konstanti  $n$  pravimo *lomni količnik* vode). Pri tem se smer žarka spremeni za kot  $\alpha - \beta$ .



Slika 3. Pot žarka v kapljici

Del žarka znotraj kapljice od ene do druge robne točke je tetiva kroga, ki je presek kapljice z našo ravnino. Trikotnik  $T_1T_2S$  je zato enakokrak, vpadni kot pri odboju je enak kotu  $\beta$ . Ker je odbojni kot enak vpadnemu,

se zato to ponovi tudi pri vsakem morebitnem nadaljnjem odboju znotraj kapljice, pri tem pa je vsakič sprememba smeri žarka enaka kotu  $\pi - 2\beta$ . Ko žarek zapusti kapljico, se spet lomi in pri tem spremeni smer za  $\alpha - \beta$ .

Če se žarek znotraj dežne kaplice  $k$ -krat odbije, znaša skupna sprememba njegove smeri

$$(\alpha - \beta) + k(\pi - 2\beta) + (\alpha - \beta) = 2\alpha - 2(k + 1)\beta + k\pi.$$

Ker začetni žarek z  $x$ -osjo oklepa kot  $\pi$ , oklepa zato izhajajoči žarek z njo kot

$$f_k = 2\alpha - 2(k + 1)\beta + (k + 1)\pi.$$

Če iz (1) izrazimo  $\beta$ , dobimo tako

$$f_k(\alpha) = 2\alpha - 2(k + 1) \arcsin\left(\frac{1}{n} \sin \alpha\right) + (k + 1)\pi. \quad (2)$$

Enačba

$$\frac{df_k(\alpha)}{d\alpha} = 0$$

ima na intervalu  $[0, \frac{\pi}{2}]$  rešitev

$$\alpha_k = \arcsin \sqrt{\frac{(k + 1)^2 - n^2}{(k + 1)^2 - 1}}.$$

Za vsak  $k \geq 1$  torej stacionarna točka obstaja, tako da tej poti žarka skozi kapljico ustreza svetlobni lok, ki s smerjo sončnih žarkov oklepa kot

$$\begin{aligned} \varphi_k = f_k(\alpha_k) = \\ = 2 \arcsin \sqrt{\frac{(k + 1)^2 - n^2}{(k + 1)^2 - 1}} - 2(k + 1) \arcsin\left(\frac{1}{n} \sqrt{\frac{(k + 1)^2 - n^2}{(k + 1)^2 - 1}}\right) + \\ + (k + 1)\pi. \end{aligned} \quad (3)$$

To je res zvezna funkcija lomnega količnika  $n$ , zato ležijo (za izbrani  $k$ ) svetlobni loki posameznih barv blizu drug drugega in skupaj tvorijo mavrico.

Lego posameznih mavričnih lokov na nebu najdemo, če poiščemo kote, pod katerimi vidimo rdeče oziroma vijolične loke v posameznem mavričnem loku. Kot vemo, so ti koti (glede na smer stran od Sonca) enaki  $\varphi_k$  (se pravi, kotom izhodnih žarkov glede na smer proti Soncu), ki jih izračunamo

po (3). Običajno nam je vseeno, v kateri smeri odmerimo kot med žarkom in dano smerjo, zato je pravzaprav tu za nas relevantna količina  $|f_k(\alpha)|$ . Ti koti so:

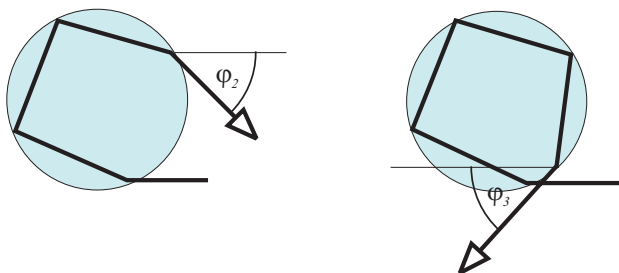
|               | rdeča   | vijolična |
|---------------|---------|-----------|
| $ \varphi_1 $ | 42, 37  | 40, 51    |
| $ \varphi_2 $ | 50, 36  | 53, 73    |
| $ \varphi_3 $ | 137, 53 | 142, 25   |
| $ \varphi_4 $ | 137, 24 | 131, 17   |
| $ \varphi_5 $ | 52, 91  | 45, 57    |

Za tretji in četrti mavrični lok so ti koti topi, kar pomeni, da sta ta dva mavrična loka na tisti strani neba, kjer je Sonce. V teh primerih raje uporabljamo suplementarne kote teh kotov, se pravi, kote, odmerjene od smeri proti Soncu:

|               | rdeča  | vijolična |
|---------------|--------|-----------|
| $ \varphi_3 $ | 42, 47 | 37, 75    |
| $ \varphi_4 $ | 42, 76 | 48, 83    |

Vidimo, da je v primarnem loku vijolična na dnu in rdeča na vrhu mavričnega loka, pri sekundarnem loku pa je vrstni red barv obrnjen. Podobno je pri tretjem oziroma četrtem mavričnem loku: pri tretjem je na dnu vijolična in na vrhu rdeča, pri četrtem loku pa je obratno. Drugi mavrični lok leži nad prvim, razmik med njima pa znaša  $8^\circ$ . Podobno je četrti mavrični lok nad tretjim, razmik med njima pa je malo več kot četrt stopinje. Prvi mavrični lok je širok manj kot  $2^\circ$ , vsak naslednji lok pa je širši od prejšnjega. Peti mavrični lok leži med prvim in drugim mavričnim lokom (pravzaprav njegov vrh že seže v območje sekundarnega loka), na dnu tega loka je vijolična barva.

Glede na to, da leži drugi mavrični lok blizu prvega, se morda zdi komu presenetljivo, da ležita tretji in četrti mavrični lok na drugi strani neba – na strani, kjer je Sonce. A dodatni odboji naredijo svoje. Na sliki 4 lahko primerjamo poti žarka pri dveh oziroma treh odbojih, ki ustrezata vpadnima kotoma, ki sta stacionarni točki za  $f_2$  oziroma  $f_3$ . Medtem ko oklepa izhodni žarek s smerjo proti Soncu pri dveh odbojih oster kot, je ta kot pri treh odbojih že top oziroma njegov suplementarni kot – kot glede na smer stran od Sonca – je oster. Zato je kot, ki ga sekundarni mavrični lok oklepa s smerjo stran od Sonca, oster, medtem ko je kot, ki ga s to smerjo oklepa terciarni mavrični lok, top, oziroma njegov suplementarni kot – kot tega mavričnega loka glede na smer proti Soncu – je oster. Medtem ko leži sekundarni mavrični lok na strani neba, ki je stran od Sonca, je terciarni mavrični lok na strani neba, kjer je Sonce.



Slika 4. Pot žarka pri dveh oziroma treh odbojih

Ni se težko prepričati, da je za vsak  $k$  funkcija  $f_k(\alpha)$  na intervalu  $(0, \frac{\pi}{2})$  konveksna, vsaka od njih ima torej v svoji stacionarni točki minimum.

Ker vrednosti  $f_k(\alpha)$  izražajo kote, med kotoma  $\varphi$  in  $\varphi + 2\pi$  pa (kadar gre za določanje lege) ne razlikujemo, lahko izraze  $f_k(\alpha)$  ustrezno poenostavimo. Konstantni člen v (3) postavimo pri lihih  $k$  kar enak nič, pri sodih pa  $\pi$  ali  $-\pi^1$ . Ker so vse  $f_k(\alpha)$  lihe funkcije<sup>2</sup>, zadošča, da jih proučimo na intervalu  $[0, \frac{\pi}{2}]$ . Za  $k = 1, 2, \dots, 5$  dobimo funkcije

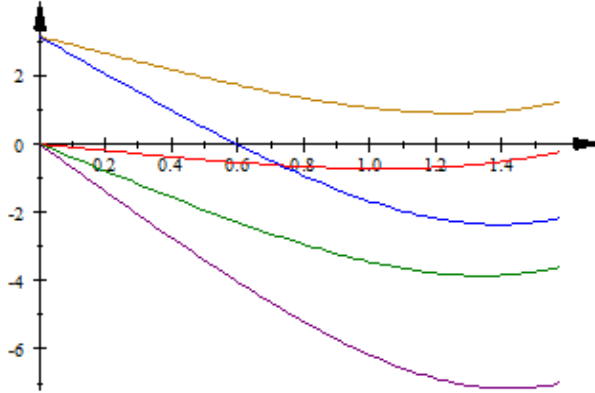
$$\begin{aligned} f_1(\alpha) &= 2\alpha - 4 \arcsin\left(\frac{1}{n} \sin \alpha\right) + 2\pi = 2\alpha - 4 \arcsin\left(\frac{1}{n} \sin \alpha\right) \\ f_2(\alpha) &= 2\alpha - 6 \arcsin\left(\frac{1}{n} \sin \alpha\right) + 3\pi = 2\alpha - 6 \arcsin\left(\frac{1}{n} \sin \alpha\right) + \pi \\ f_3(\alpha) &= 2\alpha - 8 \arcsin\left(\frac{1}{n} \sin \alpha\right) + 4\pi = 2\alpha - 8 \arcsin\left(\frac{1}{n} \sin \alpha\right) \\ f_4(\alpha) &= 2\alpha - 10 \arcsin\left(\frac{1}{n} \sin \alpha\right) + 5\pi = 2\alpha - 10 \arcsin\left(\frac{1}{n} \sin \alpha\right) + \pi \\ f_5(\alpha) &= 2\alpha - 12 \arcsin\left(\frac{1}{n} \sin \alpha\right) + 6\pi = 2\alpha - 12 \arcsin\left(\frac{1}{n} \sin \alpha\right). \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Saj lahko  $\pi$  nadomestimo s  $\pi - 2\pi = -\pi$ .

<sup>2</sup>Pri lihih  $k$  je to očitno, drži pa to tudi pri sodih  $k$  – na primer

$$\begin{aligned} f_2(-\alpha) &= 2(-\alpha) - 6 \arcsin\left(\frac{1}{n} \sin(-\alpha)\right) + \pi = \\ &= 2(-\alpha) - 6 \arcsin\left(\frac{1}{n} \sin(-\alpha)\right) - \pi = \\ &= -f_2(\alpha) \end{aligned}$$

Njihovi grafi za  $n = 1.335$  (kar je lomni količnik rumene svetlobe) na tem intervalu so na sliki 5. Zaradi boljše preglednosti so narisani v različnih barvah:  $f_1$  je rdeče,  $f_2$  rjave,  $f_3$  zelene,  $f_4$  modre in  $f_5$  vijolične barve.



**Slika 5.** Grafi funkcij  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $f_3$ ,  $f_4$  in  $f_5$

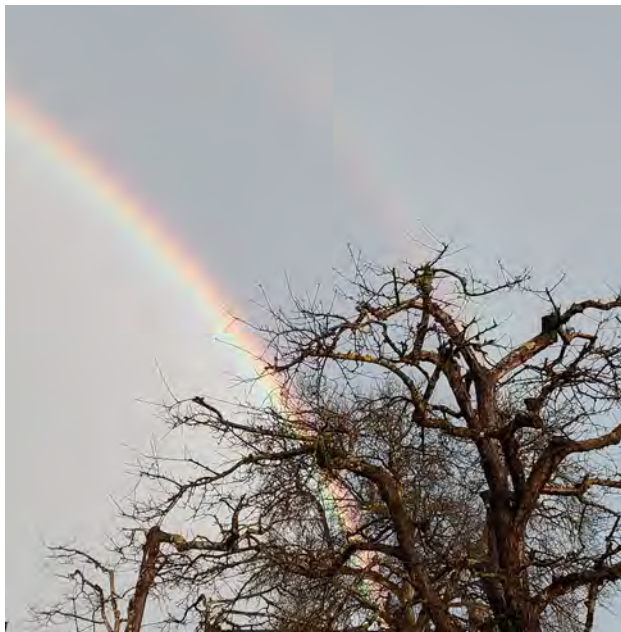
Funkcija  $|f_1(\alpha)|$  ima očitno v stacionarni točki  $\alpha_1$  maksimum in zato zalogo vrednosti  $[0, |\varphi_1|]$ . Po enem odboju znotraj dežne kapljice zato noben izhodni žarek ne more s smerjo proti Soncu oklepati kota, večjega od  $|\varphi_1|$ . Nad primarnim mavričnim lokom je torej nebo temnejše kot pod njim. Po drugi strani ima  $|f_2(\alpha)|$  v svoji stacionarni točki  $\alpha_2$  minimum in zato zalogo vrednosti  $[|\varphi_2|, \pi]$ . Po dveh odbojih znotraj dežne kapljice zato noben izhodni žarek ne more s smerjo proti Soncu oklepati kota, manjšega od  $|\varphi_2|$ , nebo pod sekundarnim mavričnim lokom je temnejše kot nad njim. Med prvim in drugim mavričnim lokom je zato nebo temnejše, kot drugje. Temu pasu pravimo Aleksandrov temni pas (po filozofu Aleksandru iz Afrodizija).

Označimo zdaj s  $\Psi_k$  svetlobni tok po  $k$ -tem odboju znotraj dežne kapljice, s  $\Phi_k$  pa svetlobni tok, ki po  $k$ -tem odboju zapusti kapljico. Potem velja

$$\Psi_k = \Phi_k + \Psi_{k+1}.$$

Ker smemo vzeti, da je  $\Phi_k = a\Psi_k$  (kjer je  $0 < a < 1$ ), sledi  $\Psi_{k+1} = (1 - a)\Psi_k$ , zato je

$$\begin{aligned}\Phi_{k+1} &= a\Psi_{k+1} = a(1 - a)\Psi_k = \\ &= (1 - a)\Phi_k.\end{aligned}$$



**Slika 6.** Aleksandrov temni pas

$\Phi_k$  je torej geometrično zaporedje s koeficientom, manjšim od ena, vrednosti  $\Phi_k$  zato z rastočim  $k$  padajo. Poleg tega se, kot smo videli, širine mavričnih lokov z rastočim  $k$  večajo, zato se relativne svetlosti naslednjih mavričnih lokov še toliko hitreje manjšajo.

Na sliki 6 se lepo vidi, da je svetlost sekundarnega mavričnega loka opazno manjša od svetlosti primarnega. Kot vemo iz izkušenj, se pravzaprav včasih, kadar razmere niso idealne, sekundarnega mavričnega loka sploh ne vidi. Tovrstne težave se seveda pri mavričnih lokih višjega reda še potencirajo.

Pri lokih tretjega in četrtega reda pa, kot vemo, nastopi še dodatna komplikacija – ta dva loka sta, za razliko od prvih dveh, na strani Sonca, zato praviloma sončna svetloba še dodatno prekrije svetlobo mavričnega loka. Da bi bila ta dva mavrična loka vidna oziroma, da bi bil viden vsaj tretji, je torej potrebno, da je nebo zapolnjeno z oblaki, tako, da je le malo svetlobe in koristno je, če je za mavričnim lokom še posebej temen oblak, na ozadju katerega bo lok bolj izstopal. Ob vsem tem pa ne smejo imeti Sončni

žarki na poti do območja dežja, kjer naj bi mavrica nastala, nobenih ovir, tako da na dežne kapljice pade kar najmočnejša svetloba, kar bo zagotovilo kar največjo svetlost mavričnega loka, hkrati pa mora biti opazovalec v senci (to je, ne sme biti izpostavljen direktni sončni svetlobi). Vsi ti pogoji so seveda le redkokdaj izpolnjeni, a tudi, ko so, je zaradi šibke svetlosti loka potrebno, da opazovalec ve, kje je treba mavrični lok iskati, sicer ga zlahka spregleda.

Vse naštetu pojasnjuje, zakaj so bili zapisi o opaženem tretjem mavričnem loku silno redki oziroma, zakaj so se prve fotografije tretjega loka posrečile šele leta 2011. Po drugi strani pa zaradi podobnosti oziroma bližine med tretjim in četrtem mavričnim lokom ne preseneča, da je prva fotografija četrtega mavričnega loka uspela že en mesec kasneje[3].

Pri petem mavričnem loku nastopi ugodna okoliščina – ne le, da lok leži stran od Sonca, ampak pade prav v Aleksandrov temni pas, se pravi v najtemnejši del neba. Kljub manjši svetlosti tega loka je zato tudi njegova fotografija sledila razmeroma hitro, že leta 2012[4]. Kot ugotavlja njen avtor, pa je prav verjetno, da je bil na kaki lepo uspeli fotografiji prvih dveh mavričnih lokov zaradi svoje šibke relativne svetlosti peti lok spregledan, da pa ga, če vemo, kje ga je treba iskati, ob pozornem pregledu fotografije vseeno najdemo.

Zaradi majhne svetlosti nadaljnjih mavričnih lokov je brez posebne opreme opaženje ali celo uspela fotografija takega loka malo vrejetna, oziroma mogoča le v kontroliranem okolju laboratorija.

## LITERATURA

- [1] M. Vilfan, *Polarizacija mavrične svetlobe*, Obzornik mat. fiz., 70 (2023) 1
- [2] M. Grossmann, E Schmidt, & A Haussmann, *Photographic evidence for the third-order rainbow*, Applied Optics, Vol. 50, Issue 28, pp. F134-F141 (2011)
- [3] M. Theusner, *Photographic observation of a natural fourth-order rainbow*, Applied Optics, Vol. 50, Issue 28, pp. F129-F133 (2011)
- [4] H. E. Edens, *Photographic observation of a natural fifth-order rainbow*, Applied Optics, Vol. 54, Iss. 4, pp. B26–B34 (2015)
- [5] K. V. Beard, N. V. Bringi, M. Thurai, *A new understanding of raindrop shape*, Atmospheric Research, Volume 97, Issue 4, pp. 396-415 (2010)
- [6] *Bad rain*, dostopno na: <https://personal.ems.psu.edu/~fraser/Bad/BadRain.html>, ogled 15. 2. 2024

### **Akademik prof. dr. Gabrijel Kernel (1932–2025)**

Konec januarja smo se poslovili od akademika Gabrijela Kernela, zaslužnega profesorja Univerze v Ljubljani in zaslužnega znanstvenika Instituta "Jožef Stefan", začetnika eksperimentalne fizike delcev v Sloveniji.

Gabrijel Kernel se je rodil septembra 1932 v Kočah pri Postojni. Fiziko je študiral na Odseku za tehniško fiziko FNT UL, kjer je leta 1965 tudi doktoriral.

Znanstveno pot je začel na betatronske pospeševalniku na Institutu "Jožef Stefan", kjer je s sodelavci izvedel pomembne meritve lastnosti atomskih jeder z uporabo žarkov gama. Raziskave na področju jedrske fizike je nadaljeval na Univerzi v Oxfordu, kjer je opazoval inverzne fotojedrske reakcije, inducirane s protoni in delci alfa ter pri tem testiral invariantnost na obrat časa.

Po vrnitvi na Institut "Jožef Stefan" se mu je leta 1975 zaradi svoje znanstvene odličnosti uspelo vključiti v raziskave v evropskem centru za jedrsko fiziko CERN v Ženevi. Ob sebi je zbral ekipo mlajših sodelavcev. Bil jim je mentor pri diplomskih in magistrskih nalogah ter doktoratih. Z njimi je v okviru mednarodne raziskovalne skupine Omicron zgradil spektrometer za raziskovanje sipanja pionov na protonih. Pri osrednji meritvi, študiju tvorbe pionov blizu praga, je s sodelavci izmeril pionsko-pionsko sipalno dolžino. V tem času je prevzel vodstvo skupine Omicron in jo zelo uspešno vodil, najprej med zajemanjem podatkov, nato pa še v obdobju njihove analize in interpretacije rezultatov.

Skrb za mlajše sodelavce in za razvoj fizike delcev ga je leta 1984 vodila pri odločitvi za vključitev njegove raziskovalne ekipe v mednarodno znanstveno skupino ARGUS v raziskovalnem središču DESY v Hamburgu. Tam so s sodelavci prvi izmerili mešanje nevtralnih mezonov B in tako prišli do enega najbolj presenetljivih rezultatov v fiziki delcev konec osemdesetih let. Z mlajšimi sodelavci je izmeril sklopitveno konstanto močne interakcije in študiral hadronske sisteme, ki nastanejo pri trku dveh visokoenergijskih žarkov gama.

Veliko vitalnost je pokazal, ko se je pri 66 letih pridružil skupini DELPHI v CERN-u. Tu je, med drugim, s sodelavci določil sklopitveni parameter treh šibkih umeritvenih bozonov in proučeval asimetrijo naprej-nazaj pri



razpadih nevtralnega šibkega mezona v par kvark-antikvark b.

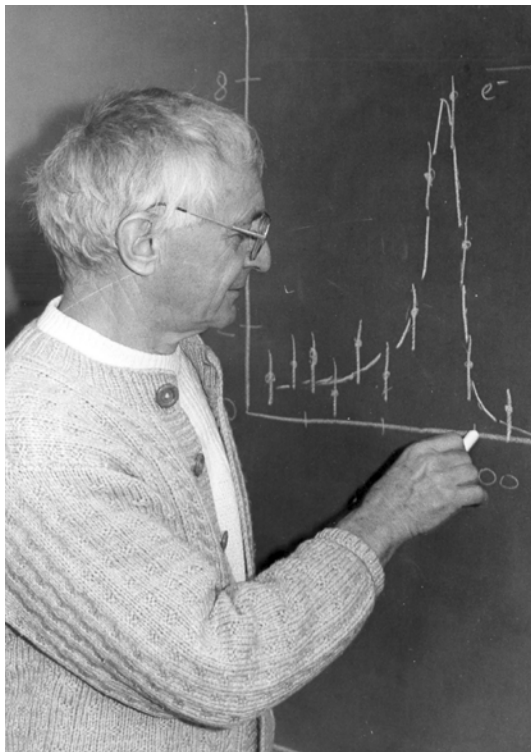
Gabrijel Kernel ni bil le vrhunski znanstvenik. Bil je tudi predan pedagog in mentor, ki je navdihnil generacije mladih fizikov. Bil je ključna oseba za razvoj študija fizike delcev na Univerzi v Ljubljani. Bil je izjemen mentor pri diplomskih, magistrskih in doktorskih delih. Njegovi študenti so se uveljavili kot uspešni znanstveniki, pedagogi in podjetniki. Mlajše sodelavce nas je spodbujal pri iskanju samostojne raziskovalne poti in odpiranju novih raziskovalnih področij. Marko Mikuž in Danilo Zavrtanik sta z mlajšimi sodelavci nadaljevala raziskave v eksperimentih v CERN-u pri bistveno višjih energijah, Peter Križan pa je s sodelavci najprej raziskoval na inštitutu DESY in nadaljeval pri raziskovalnem projektu Belle na Japonskem.

Med priznanji njegovemu raziskovalnemu delu je treba omeniti Kidričevi nagradi leta 1960 in 1970, nagrado Sklada Borisa Kidriča 1975, Kidričevo nagrado leta 1991, priznanje ambasador Republike Slovenije za znanost leta 1992 in Zoisovo nagrado za življenjsko delo leta 2011. Leta 1995 je bil izvoljen za izrednega člana Slovenske akademije znanosti in umetnosti in leta 2001 za rednega člana. Med letoma 2008 in 2014 je bil načelnik Oddelka za matematične, fizikalne in kemijske vede III. razreda SAZU.

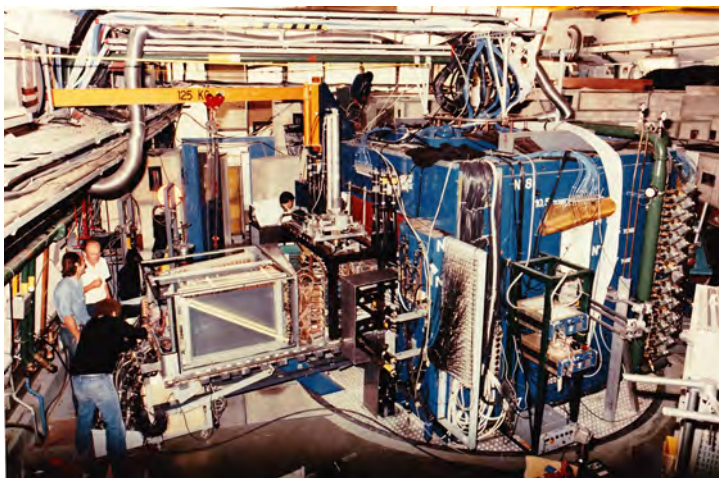
Gabrijel Kernel je opravljal številne pomembne funkcije na Univerzi v Ljubljani, na Inštitutu "Jožef Stefan", na Univerzi v Novi Gorici, na Raziskovalni skupnosti Slovenije in na Agenciji za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije.

Predvsem pa je bil Gabrijel Kernel, naš kolega in vzornik, ki smo ga prijatelji in kolegi klicali Elko, čudovit človek in sodelavec. Znal je prisluhniti svojim mlajšim kolegom in z njimi deliti svoje razkošno znanje. Ob njem smo mlajši sodelavci v letih, ki so bila odločilna za naše formiranje, spoznali moč uglašene raziskovalnega dela v skupini.

*Peter Križan in Marko Mikuž*



Slika 1. Med predavanji.



Slika 2. Spektrometer Omicron v CERN-u.



**Slika 3.** Slovenska ekipa pri eksperimentu Omicron poleti 1982: sedijo Gabrijel Kernel, Aleš Stanovnik, Danilo Zavrtanik, stojijo Marko Starič, Peter Križan, Franc Sever, Marko Mikuž, Darko Korbar (od leve proti desni).



**Slika 4.** Osemdesetletnica Gabrijela Kernela: Aleš Stanovnik, Walter Schmidt-Parzefall (vodja eksperimenta ARGUS), Volker Soergel (direktor instituta DESY), Svjetlana Fajfer, Gabrijel Kernel.

## Enaintrideseto mednarodno tekmovanje študentov matematike

V letu 2024 je mednarodno matematično tekmovanje za študente potekalo med 5. in 11. avgustom, tudi tokrat v Blagoevgradu v Bolgariji. Na seznamu udeležencev je bil tokrat 401 študent, kar je največ do sedaj. Ekip je bilo 79. V vseh izvedbah je do sedaj sodelovalo že več kot 200 institucij, kar seveda pomeni, da jih mnogo ne sodeluje več. Razlogi za to so verjetno različni, a pogosto se zgodi, da ko vodja ekipe ne želi (ali zmore) več voditi svoje ekipe, ne dobi naslednika in univerza preneha s sodelovanjem. Pri nas se to na srečo ni zgodilo. Prav tako pogosto pride do kakšnih nepredvidenih neželenih okoliščin, zaradi katerih potem univerza ne sodeluje več. Tudi to se, na srečo, pri nas ni zgodilo. Več o tem kasneje.

Iz Slovenije je bilo letos spet veliko udeležencev, kar 10 tekmovalcev, še en udeleženec in trije spremljevalci. Fakulteto za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani so zastopali **Luka Ponikvar** iz drugega letnika, **Lovro Drofenik**, **Jaka Vrhovnik** in **Patrik Žnidaršič** iz tretjega letnika ter **Maša Žaucer**, **Luka Horjak** in **Job Petrovčič** iz prvega letnika druge stopnje. V ekipi je bil sicer tudi **Luka Andrešek** iz drugega letnika, ki pa je na poti zbolel in se še pred tekmovanjem vrnil domov. Fakulteto za matematiko, naravoslovje in informacijske tehnologije Univerze na Primorskem so zastopali **Diar Gashi**, **Esmir Zoletić** in **Dmytro Tupkalenko**. Vodji ekip sva bila Gregor Šega in Gregory Robson, pomočnik vodje ekipe FMF pa je bil Beno Učakar.



Slika 1. Ekipa FMF tik pred začetkom tekmovanja.

Tudi letos so naši tekmovalci naloge reševali zelo uspešno. Luka Horjak je svojo lansko uvrstitev izboljšal še za eno mesto in s petim mestom spet osvojil veliko prvo nagrado. Poleg njega je prvo nagrado dobil tudi Job Petrovčič. Drugo nagrado so dobili Jaka Vrhovnik, Lovro Drofenik in Patrik Žnidaršič, tretjo nagrado pa Luka Ponikvar in Maša Žaucer. Prav tako je Diar Gashi osvojil tretjo nagrado, Esmir Zoletić pohvalo in Dmytro Tupkalenko potrdilo o udeležbi.

Ekipni uspeh se je odrazil pri skupni uvrstitvi, kjer je ekipa FMF dosegla **šestnajsto mesto**, kar je spet odlična uvrstitev naše ekipe. V vsakem izmed zadnjih štirih let smo vedno osvojili vsaj dve prvi nagradi, pred tem pa v štirinajstih letih le eno. Še en dokaz izjemnosti trenutne generacije tekmovalcev na FMF. Ekipa FAMNIT je bila 71-ta.

Več kot 400 tekmovalcev s spremljevalci presega zmogljivosti študentskega kampusa v Blagoevgradu, zato je bilo nekaj udeležencev nastanjenih po okoliških namestitvah. Tako se je delno sicer izgubila lokalnost tekmovanja. Tega naša ekipa sicer ni toliko občutila, saj smo bivali v Blagoevgradu manj časa od predvidenega.



**Slika 2.** Namesto na cilju še na poti.

Namreč, za ekipo FMF se je tokrat tekmovanje začelo neobičajno. Namesto da bi prispeli v ponedeljek (kot je bilo načrtovano), v torek prisostvo-



vali otvoritveni slovesnosti in izbirali naloge (to seveda počneta le vodja in pomočnik vodje), smo bili v sredo, na prvi tekmovalni dan, še na poti. Razlog so bile zamude v letalskem prometu. Sredi noči smo le prispeli, še nekaj časa pa je potem trajalo, da smo zbudili organizatorje in da so ti ugotovili, kam naj nas namestijo. Po le nekaj urah spanja je tekmovalce čakalo prvih pet ur reševanja nalog. Nadaljevanje sicer ni bilo brez nevšečnosti (od blizu smo spoznali tudi učinkovitost bolgarskega zdravstvenega sistema), vendar so tekmovalci vse dobro prenesli in, kot kažejo rezultati, hujšega negativnega učinka teh nevšečnosti ni bilo.



**Slika 3.** Ena od predavalnic tik pred začetkom reševanja.

Po vseh težavah na poti je bilo reševanje nalog za naše tekmovalce najboljše oblika sprostitev. Trije primeri sprostitvenih nalog sledijo.

Tokrat začnimo s kompleksnimi števili.

**Naloga 1.** Poiščite vse pare kompleksnih števil  $(a, b) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ , za katere velja

$$|a| = |b| = 1 \quad \text{in} \quad a + b + a\bar{b} \in \mathbb{R}.$$

Druga naloga je z zaporedji:

**Naloga 2.** Dano je zaporedje  $x_1, x_2, \dots$  z začetnima členoma  $x_1 = 2$  in

$x_2 = 4$  ter rekurzivno zvezo

$$x_{n+2} = 3x_{n+1} - 2x_n + \frac{2^n}{x_n} \quad \text{za } n \geq 1.$$

Dokažite, da obstaja limita  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{2^n}$  ter velja

$$\frac{1 + \sqrt{3}}{2} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{2^n} \leq \frac{3}{2}.$$



**Slika 4.** Piknik večerja po drugem tekmovalnem dnevu.

Končajmo z nalogo iz kombinatorike.

**Naloga 3.** Matrika  $A = (a_{ij})$  je *prijetna*, če ustreza naslednjim zahtevam:

- (i) Elementi matrike  $A$  so natanko števila  $\{1, 2, \dots, 2t\}$ , za neko naravno število  $t$ .
- (ii) Elementi matrike  $A$  so nepadajoči v vsaki vrstici in vsakem stolpcu.
- (iii) Enaki elementi se lahko pojavijo samo v isti vrstici ali v istem stolpcu.
- (iv) Za vsak par dveh zaporednih števil lahko najdemo dva predstavnika v matriki, ki sta v različnih stolpcih in različnih vrsticah.

Dokažite, da je za vsaki celi števili  $m$  in  $n$  število različnih prijetnih matrik razsežnosti  $m \times n$  sodo.

Na primer, edini  $2 \times 3$  prijetni matriki sta  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$  in  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}$ .



**Slika 5.** Ekipa FMF na podelitvi priznanj.

*Rešitev Naloge 1.* Nalogo se da rešiti na več načinov. Če števili zapišemo v eksponentnem zapisu, preko faktorizacije vsot sinusov hitro pridemo do rešitve. Ena možnost je obravnava enačbe glede na  $a$ . Morda najelegantnejša rešitev pa je naslednja: ker je  $a + b + a\bar{b} \in \mathbb{R}$ , velja

$$a + b + a\bar{b} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{a}b.$$

Obe strani pomnožimo z  $ab$  ter upoštevamo, da je  $a\bar{a} = 1$  in  $b\bar{b} = 1$ , da dobimo

$$a^2b + ab^2 + a^2 = b + a + b^2$$

oziroma

$$a^2b + ab^2 + a^2 - b - a - b^2 = 0.$$

Izraz razcepimo:  $a^2b + ab^2 + a^2 - b - a - b^2 = ab(a+b) + (a+b)(a-b) - (a+b) = (a+b)(ab + a - b - 1) = (a+b)(a-1)(b+1)$ . Tako dobimo tri družine rešitev:  $b = -a$  ali  $a = 1$  ali  $b = -1$ .





Slika 6. Uspešni in zadovoljni udeleženci.

*Rešitev Naloge 2.* Rekurzivno zvezo preoblikujemo:

$$x_{n+2} - 2x_{n+1} = x_{n+1} - 2x_n + \frac{2^n}{x_n},$$

od koder (z iteracijo) dobimo

$$x_{n+2} - 2x_{n+1} = x_2 - 2x_1 + \sum_{k=1}^n \frac{2^k}{x_k}.$$

Prva dva člena poznamo, tako je

$$x_{n+2} = 2x_{n+1} + \sum_{k=1}^n \frac{2^k}{x_k}.$$

Sledi, da je  $x_n \geq 2x_{n-1}$ , posledično je  $x_n \geq 2^n$ . Ker je torej  $\frac{2^k}{x_k} \leq 1$ , smo dobili oceno

$$2x_{n+1} \leq x_{n+2} \leq 2x_{n+1} + n.$$

oziroma

$$\frac{x_{n+1}}{2^{n+1}} \leq \frac{x_{n+2}}{2^{n+2}} \leq \frac{x_{n+1}}{2^{n+1}} + \frac{n}{2^{n+2}}.$$

Sledi, da je zaporedje  $\frac{x_n}{2^n}$  naraščajoče in

$$\frac{x_n}{2^n} \leq \frac{x_{n-1}}{2^{n-1}} + \frac{n-2}{2^n} \leq \frac{x_2}{2^2} + \sum_{k=2}^n \frac{k-2}{2^k}.$$

Ker je  $\frac{x_2}{2^2} = 1$ ,  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^{k-1}} = \frac{1}{(1-1/2)^2} = 4$  in  $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{2}{2^k} = \frac{1/2}{1-1/2} = 1$ , je  $\frac{x_n}{2^n} \leq 1 + 1/2(4-1) - 1 = 3/2$ . Dokazali smo, da je zaporedje naraščajoče in omejeno, torej ima limito. Ta limita je manjša (ali enaka) od zgornje meje ter večja od vsakega člena zaporedja. Izračunamo lahko  $x_3 = 9$ ,  $x_4 = 20$ ,  $x_5 = 386/9$  in  $x_6 = 1342/15$ . Tako je  $\frac{x_6}{2^6} = 671/480 = \frac{240+431}{480}$ . Ker je  $431/240 > \sqrt{3}$  ( $431^2 = 185761$  in  $3 \cdot 240^2 = 172800$ ), smo pokazali tudi spodnjo mejo.

Opozorilo glede tretje naloge: ta je bila precej težja od prejšnjih dveh, kar med drugim kaže povprečna ocena. Če je prva naloga bila v povprečju ocenjena z 8,3 točke (od 10 možnih) in druga s 4,7, je imela ta naloga povprečje le 0,2.

### *Rešitev Naloge 3.*

Definiramo standardno Youngovo tabelo oblike  $m \times n$  kot matriko razsežnosti  $m \times n$  z elementi  $1, 2, \dots, nm$ , razporejenimi naraščajoče v vsaki vrstici in vsakem stolpcu. Rečemo, da sta dve standardni Youngovi tabeli prijateljski, če se razlikujeta le v dveh zaporednih številih (kjer ima ena zapisana  $x$  in  $x+1$ , ima druga  $x+1$  in  $x$ ).

Iz prijetne matrike tvorimo standardno Youngovo tabelo tako, da število  $i$  iz prijetne matrike, ki se v njej pojavi  $n_i$ -krat, zamenjamo s števili od  $n_1 + \dots + n_{i-1} + 1$  do  $n_1 + \dots + n_i$ . Ker moramo ohraniti monotonost, je transformacija enolična.

Opazimo, da ima dobljena standardna Youngova tabela natanko  $2t - 1$  prijateljskih tabel ( $2t$  je število različnih števil v izvorni prijetni matriki).

Poleg tega vsaka standardna Youngova tabela z lihim številom prijateljskih tabel ustreza enolično določeni prijetni matriki.

Za konec uporabimo lemo o rokovanjih: število Youngovih tabel, ki imajo liho prijateljskih tabel, je sodo.

Druge naloge najdete na internetni strani [www.imc-math.org.uk](http://www.imc-math.org.uk).

S tem tekmovanjem se je zaključilo določeno obdobje, menjava se ekipa študentov (tako kot vsako leto), prihodnje leto pa tudi vodja ekipe FMF. Z veseljem in nestrpnim pričakovanjem tako čakamo poletje, ko bo 32. zaporedno tekmovanje spet potekalo v Blagoevgradu.

*Gregor Šega*

## Poročilo sestanka predsednikov EMS

Sestanek predsednikov EMS je potekal 29. in 30. marca v kraju Protaras na Cipru, ki ga je po kratkem uvodnem nagovoru otvoril predsednik Jan Philip Solovej.



Sledile so **tri predstavitve**.

Predsednik ciprskega matematičnega društva Gregory Makrides je predstavil delovanje društva. Organizirajo tekmovanja, konference, imajo med 1000-1200 slušateljev na poletnih šolah itd., njihov letni proračun pa je podoben našemu. Zelo so aktivni v STEAME projektu (več v odstavku o izobraževanju).

Enrico Schlitzer je zadolžen za komuniciranje in stike z javnosjo pri EMS. Uvedli so platformo Good Grants za procesiranje prijav na razpise EMS. Spet spodbujajo matematike, da se prijavljajo na ERC razpise.

Predsednik poljskega matematičnega društva Jacek Miękisz nas je znova opozoril na razpis za Banachovo nagrado za najboljši doktorat iz matematike. Rok za prijavo je bil 15. maj, več najdete na <https://ibp.ptm.org.pl/en/>. Podeljujejo tudi Nagrado Ryll-Nardzewski za dosežke po letu 2016, rok je konec leta, razpis pa še bo objavljen. Poljaki so ustanovili (recenzirano) revijo BioPhysMath, ki gostuje na arxivu, pokriva pa povezave biologije z informatiko, matematiko, fiziko, statistiko. Opozoril je, da matematiki vse pogosteje odhajajo v industrijo, kar počasi postaja problem.

Nadaljevali smo s **kratкими poročili**.

Izvršni direktor EMS Press André Gaul je povedal, da založniška hiša izdaja 26 revij, 22 po modelu S2O (subscribe to open) in 4 z diamantnim dostopom (brez stroškov za bralce ali pisce, ampak trenutno ta model ni

finančno vzdržen, ker je osnovan na donacijah in projektih), izdajo 10-12 knjig letno, od leta 2003 okoli 250 knjig.

Predsednik Odbora za države v razvoju, Balasz Szendroi je povedal, da se ukvarjajo s promocijo matematike na globalnem jugu (Maroko, Vietnam, Senegal, Pakistan, Uzbekistan, Malezija, Nigerija, Benin), od leta 2017 do 2023 je program financirala Simonsova fundacija, vendar v zadnjih dveh letih na razpisu niso bili več uspešni. Direktno so financirani dogodki, obstaja program donacije knjig, svetujejo pri pripravi kurikulumov, doktorskih programov ipd. Spodbujajo ljudi iz drugih regij, da se vključijo v delovanje Odbora, saj so sedaj deleženi večinoma ljudje iz severozahodne Evrope.

Predsednica Odbora EMS za srečanja, Klavdija Kutnar, je povedala, koliko dejavnosti so v zadnjem letu financirali in nas spomnila, da je rok za oddajo prijav za sofinanciranje 31. julij leta N-1 za leto N. Financirajo se znanstvena srečanja, matematični vikendi, ki pokrivajo več matematičnih področij, organizirani z enim ali več korporativnih članov EMS, drugi relevantni dogodki, poletne šole, ki trajajo vsaj 5 dni in imajo dva tečaja z najmanj 10 urami.

Predsednica Odbora za evropsko solidarnost Karine Chemla je povedala, da Odbor nudi podporo za mlade raziskovalce brez lastnega raziskovalnega denarja ali za upokojene matematike.

Predsednik EMS Solovej je predstavil delovanje zbMATH Open. Soočajo se s težavami, povezanimi z množičnim zajemanjem podatkov, ki ga omogoča umetna inteligenca (AI data scraping) to pomeni, da imajo več milijonov dostopov na dan z raznih IP števil, kar otežuje dostop navadnim uporabnikom. Poleg tega nočejo, da s temi podatki manipulirajo roboti, čeprav je dostop odprt. Dobili so projekt za izdelavo orodij za detektiranje plagiatov.

Enrico Schlitzer je ocenil, da imamo okoli 40 000 evropskih raziskovalcev matematikov (od 1.4 milijona evropskih raziskovalcev). Spomnil je, da so mladi novi člani EMS tri leta oproščeni članarine, imajo pa poln dostop do storitev EMS in spodbudil vse, da informacijo prenesejo na svoje institucije. Predstavil je pregled aktivnosti na področju zmanjševanja neenakosti in enakih možnosti. Platforma EMS job (<https://euromathsoc.org/jobs>) zbira ponudbe za službe v matematiki in prosijo za promocijo te strani. Spomnil je na platformo Popmath (<https://www.popmath.eu/>), ki je namenjena objavam dogodkov s področja popularizacije matematike.

Preko Zooma se je javil tudi Ravi Vakil, predsednik AMS. Povedal je, da imajo sedaj organ, ki skrbi za povezavo med znanstvenim okoljem in politiko. Izrazil je skrb zaradi vpliva nove administracije na univerzitetno okolje. Že v preteklosti je bilo National Science Foundation (NSF) namenjeno

manj denarja, kot ga je bilo obljubljenega (lani je bilo razmerje 1:2). Na NSF so odpustili 10 % osebja, obeta se tudi zmanjšanje financiranja.

V delu, namenjenemu **razpravam**, smo govorili o naslednjih temah.

**Odperti dostop.** Nekatere države imajo sklenjene sporazume na nacionalnem nivoju, nekatere pa imajo končno licenc, ki jih proti koncu leta zmanjka. Adam Skalski, predsednik ERCOMa pri EMS (Evropski matematični raziskovalni centri) je povedal, da Poljaki še vedno zagovarjajo odprti dostop, čeprav njihova znanstvena fundacija ne zahteva več, da je to, kar financirajo, objavljeno v odprtem dostopu. Predsednik Solovej je poudaril, da so predlagatelji plana S (<https://www.coalition-s.org/towards-responsible-publishing/>) pozabili, da gre denar za odprti dostop iz raziskovalnega denarja, kar za matematike lahko pomeni tudi do 10 % proračuna. Tisti, ki imajo projekte, so ponekod obvezani plačati odprti dostop. Po analizi Instituta Max Planck je šlo pri prehodu na plan S na začetku samo za zamenjavo poslovnega modela, ki ni spremenila cene. Kasneje je to, da so raziskovalci prisiljeni v objave v odprtem dostopu, povzročilo dvig cen. Podpredsednica belgijskega matematičnega društva Sonja Hochloch je povedala, da Belgija zahteva, da morajo raziskovalci pri potovanjih plačati še za ogljični odtis, kar pomeni pri konkretnem primeru skupaj z odprtim dostopom 25 % raziskovalnega proračuna.

Predlog iniciative o odgovornem objavljanju iz leta 2023 <https://www.coalition-s.org/towards-responsible-publishing/> pravi, da je potrebno skrajšati čas od rezultata do objave. Opozarja na izgubljene informacije pri recenziranju, saj sta zaradi anonimnosti izgubi intelektualni vložek in vpogled recenzenta v članek. Menijo, da je sedanji postopek recenziranja posebej neugoden za mlade raziskovalce. Predlagajo sistem, ki bi bil osnovan na skupnosti raziskovalcev in bi sledil petim načelom: da je raziskovalec sam odgovoren za diseminacijo svojih rezultatov, vsi rezultati so takoj vidni vsem v celoti, za kontrolo kvalitete, ki je javna, poskrbi znanstvena skupnost sama, pomembnost objav bo določila znanstvena skupnost sama in vsi deležniki v znanosti se zavežejo k podpori takšne vrste odprtega dostopa. Da predlog morda ne vodi v smer, ki so si jo zamislili predlagatelji plana S, opozarjajo mnenja na strani <https://scholarlykitchen.sspnet.org/2023/11/16/ask-the-chefs-coalition-ss-towards-responsible-publishing/>

**Plenilske revije.** Na vprašanje, ali obstaja kak spisek revij, za katere se ve, da niso plenilske, je glavni urednik zbMATH Christian Baer odgovoril, da zbMATH nekaterih revij ne pokriva (tistih, za katere meni, da so sumljive, gotovo ne), tiste, ki jih pokriva 100 %, so varne, nekatere pa pokriva po člankih. (Obstaja **Bealov seznam** <https://beallslit.net/#update>)

**Izobraževanje.** Na kratko sem predstavila težave, ki jih imamo zaradi

pomanjkanja učiteljskega kadra v Sloveniji in posila kolege za deljenje njihovih izkušenj.

Montserrat Alsina, predsednica katalonskega matematičnega društva, je povedala, da se tudi Katalonci soočajo s premajhnim številom učiteljev matematike. Posledično matematiko učijo ekonomisti, inženirji in podobni. Imajo projekt z vlado, ki bo plačala za doizobraževanje za učitelje. Učitelji pa bi morali biti tudi na tekočem z novostmi. Poskušala je prepričati uradnico na ministrstvu za izobraževanje o pomembnosti matematike in je tako v času tekmovanja Kenguru organizirala srečanje uradnice z učenci, ki so uradnici povedali, da bi se radi učili matematiko in kaj znali; to jo je presenetilo, ker je pričakovala, da jih zanima samo, kako bi se dobro imeli. Starši opažajo, da je kljub visokim ocenam znanje neustrezno in tisti, ki si to lahko privoščijo, najemajo inštruktorje za svoje otroke.



Podoben problem s pomanjkanjem učiteljev imajo tudi Danci, pravi predsednik danskega matematičnega društva Simon Kristensen. Težava ni le plača, ampak predvsem pomanjkanje spoštovanja poklica. Primanjkljaj učiteljev so poskusili zmanjšati tako, da bi doizobrazili 30 brezposelnih inženirjev. Izobraževanje sta končala samo dva, saj so drugi opustili izobraževanje, ko se je na trgu stanje izboljšalo.

Predsednik italijanskega matematičnega društva Marco Andreatta je povedal, da je pri njih isti problem. Poleg tega ministrstvo vsakih 10 let menja pravila. Uvedli naj bi računalništvo znotraj matematike, za ta pouk imajo neke usmeritve, ki pa se jih računalničarji nočejo držati.

Predsednica hrvaškega matematičnega društva Vesna Županovič je povedala, da se podjetja zavedajo, kako je pomembna matematika in tako poberejo vse diplomante in nihče ne ostane v šolstvu.

Za razliko od drugih pa Švicarji, kot je povedal predsednik švicarskega matematičnega društva Joachim Rosenthal, nimajo težav z učiteljskim kadrom. Učitelji začetniki imajo malenkost višje plače, kot je začetniška plača inženirja. Za poučevanje je potreben magisterij iz matematike in doizobraževanje s pedagoškimi predmeti, kar pa lahko opravijo, ko so že zaposleni. Povedal je tudi, da gre približno četrtnina do tretjina učencev po osnovni šoli na gimnazije. Te veljajo za elitne. Imajo pa zelo dobro razvit sistem šol z vajeništvom.

Predsednik finskega matematičnega društva Pekka Panka pravi, da imajo manjši dotok študentov matematike, približno polovico manj, na pedagoških smereh pa približno tri četrtnine manj kot v preteklih letih.

Predsednik ciprskega matematičnega društva Makrides pravi, da bi EMS moralo bolj promovirati učenje in se vprašati, kaj lahko naredi za učitelje. Lahko bi dala učiteljem na voljo svoje vire. To so ljudje, ki bodo spodbudili mlade, da se ukvarjajo z matematiko. Ozaveščanje je treba začeti pri majhnih. Sedaj se med najboljšimi samo 20 % študentov se odloči za STEM področja.

Makrides tudi sodeluje pri projektu STEAME (Science, Technology, Engineering, Arts, Mathematics and Entrepreneurship). Gre za projektno učenje. Za prenos v šole izobražujejo učitelje, ki dobijo poseben certifikat. Več si lahko preberete na spletni strani: <https://steame-academy.eu/>. Tehnološko je integracija projektnega učenja zaradi novih tehnologij možna, težava je, kako najti šolski čas za to. Opozoril je na raziskavo OECD o razvoju matematičnih kurikulumov: [https://www.oecd.org/en/publications/an-evolution-of-mathematics-curriculum\\_0fffd89d0-en.html](https://www.oecd.org/en/publications/an-evolution-of-mathematics-curriculum_0fffd89d0-en.html)

Predsednica izraelskega matematičnega združenja Mina Teicher je menila, da je potrebno napore usmeriti v to, da se med splošno populacijo poveča zavedanje o tem, kje vse je matematika in da se je brez nje nemogoče spopasti z izzivi 21. stoletja.

Čeprav matematika predstavlja temelj številnih sodobnih tehnoloških rešitev, se njene vloge v širši javnosti pogosto ne prepozna. Solovej zato izpostavlja, da matematiki delujemo kot 'strojnica' znanstvenega in tehnološkega sistema – ključni za njegovo delovanje, a večinoma ostajamo v ozadju, neopaženi.

**Povezava med matematiki in odločevalci.** Dolgoročna ideja bi bila imeti pisarno v Bruslju, ki bo skrbela za povezavo med matematiki in odločevalci. Zato EMS predlaga ustanovitev dveh delovnih skupin, zunanje (odločevalci in financiranje) ter notranje (mobilizacija raziskovalcev, informiranje matematične skupnosti o tem, kdo so pomembni deležniki doma, ki imajo vpliv na evropskem nivoju).

Izpostavljeno je bilo, da pomaga, če imamo močne prijatelje, kot je v Nemčiji VW fundacija, <https://www.volkswagenstiftung.de/en/our-funding-portfolio>.

Predsednik italijanskega matematičnega društva Marco Andreatta je povedal, da jim bo Deloitte pomagal pri prepričevanju vlade, da je matematika pomembna. V ta namen pripravljajo poročilo (ki pa ni poceni).

Nekaj teh poročil je že bilo pripravljenih in jih je zbrala EUMathsIn (<https://eu-maths-in.eu/documents/>). Naredili so jih Nizozemci in Britanci, ki so najeli lobiste za prenos vsebine poročila odločevalcem, kar se je pokazalo za uspešno.



*Za OM DMFA Jasna Prezelj*

## **Zahvala**

V prejšnji številki smo predstavili novo pridobitev za slovensko matematiko in fiziko – zaključen projekt digitalizacije vseh številok Preseka in Obzornika DMFA. Še pred nekaj leti bi bila izvedba takšnega projekta nepredstavljiva. Uresničil jo je izjemen razvoj računalništva in umetne inteligence v zadnjih letih, ki je omogočil precej zanesljivo strojno razpoznavanje (angl. OCR – optical character recognition) matematičnih in fizikalnih tekstov.

Opravljen je bilo strojno razpoznavanje vseh skeniranih Obzornikov, na podlagi tega pa narejen iskalnik, ki omogoča iskanje po ključnih besednih zvezah v vseh številkah Obzornika od 1. do 54. letnika. Iskalnik zanesljivo prepozna slovenske šumnike, najde tudi deljene besede ter nima težav



s pisanimi črkami, ki se pojavljajo na primer v prvih letnikih Obzornika. Seveda se tu in tam neizogibno pojavljajo tudi napake, ki so posledica napačnega strojnega razpoznavanja ali slabše kakovosti skeniranja. Te bomo postopoma odpravljali s pomočjo odzivov naših bralcev.

Trenutno lahko do digitaliziranih Obzornikov dostopamo preko [https://lkrv.fri.uni-lj.si/~ajurismic/omf\\_1-54/index.html](https://lkrv.fri.uni-lj.si/~ajurismic/omf_1-54/index.html) Poteka prenos datotek na strežnik DMFA, kasneje pa tudi na strežnik Digitalne Knjižnice Slovenije, DLIB.

Drznemo si trditi, da je to delo po pomembnosti za slovensko matematiko in fiziko primerljivo s prvo izdajo Obzornika DMFA. Iskrena zahvala Aleksandru Jurišiču in njegovim sodelavcem, ki je zasnoval ta projekt, ga izvedel in omogočil njegovo javno uporabo.

*Uredništvo*

## **Vabilo na Konferenco slovenskih matematikov**

Odbor za matematiko pri DMFA Slovenije vas vabi, da se udeležite druge Konference slovenskih matematikov, ki bo 12. in 13. septembra 2025 v Kopru. Konferenca bo imela dve plenarni predavanji, pedagoško sekcijo, raziskovalno-aplikativno sekcijo in sekcijo za mlade (doktorske in poddoktorske študente).

V petek, 12. septembra, bo popoldne okrogla miza na temo pomanjkanja učiteljev fizike in matematike z gosti z ministrstva za šolstvo.

Vabim o vas, da se čim prej registrirate preko spletne strani konference: <https://conferences.mattheo.si/event/45/>.

## **Poročilo o 79. Občnem zboru DMFA Slovenije**

79. občni zbor društva DMFA Slovenije je potekal v četrtek, 6. marca 2025, v Vidavovi predavalnici na Fakulteti za matematiko in fiziko v Ljubljani. Po kratkem pozdravu predsednice društva dr. Mojce Vilfan smo kljub lepo napolnjeni predavalnici hitro ugotovili, da se ni zbrala vsaj polovica vseh članov društva, zato smo v skladu s tradicijo odložili začetek občnega zbora za pol ure in pred kateder povabili posebnega gosta. Dr. Lev Vidmar, prejemnik Zoisovega priznanja 2024 za odkritje novih vzorcev obnašanja večdelnih kvantnih sistemov, nas je s poljudnim predavanjem Kvantna fizika nekoč in danes: od enega do mnogo delcev odpeljal skozi kratko zgodovino v sodobno stanje kvantne fizike.

Ugotovitvi sklepčnosti je sledilo imenovanje delovnega predsedstva (predsednik Boštjan Kuzman, člana Jasna Prezelj, Nejc Košnik) in verifikacijske

komisije (zapisnikarica Lara Grum, overovatelj Jurij Bajc, Ciril Dominko). Po sprejemu dnevnega reda smo se z minuto molka poklonili članom društva, ki so nas zapustili v zadnjem obdobju, med njimi dr. Zvonko Trontelj, fizik, profesor na UL, častni član in nekdanji predsednik DMFA, dr. Gabrijel Kernel, fizik, član SAZU, zasl. profesor UL in zasl. znanstvenik IJS, prof. dr. Rudolf Podgornik, fizik, zasl. profesor UL in zasl. znanstvenik IJS, France Perne, upokojeni prof. matematike na Gimnaziji v Novi Gorici, Jelisava Sakelšek, učiteljica fizike, dolgoletna članica komisije za tekmovanje iz fizike OŠ, Tomaž Skulj, profesor fizike, prvi urednik revije Presek ter dr. Bogdan Povh, fizik, dopisni član SAZU.

Predsednica dr. Mojca Vilfan je nato predstavila Letno poročilo in podala kratek pregled dela društva v zadnjem obdobju: uspešno delo pri organizaciji državnih tekmovanj (19 tekmovanj, več kot 100.000 udeležencev, okoli 7000 mentorjev iz 700 šol), izjemni uspehi mladih na mednarodnih olimpijadah (skupaj 3 zlate, 6 srebrnih in 4 bronaste medalje v letu 2024 ter že drugič zapored absolutno 1. mesto Petra Andolška na astronomski olimpijadi), kontinuirana založniška dejavnost (reviji Presek in Obzornik, priložnostni zborniki konferenc in srečanj, spletna trgovina), delovanje strokovnih odborov v mednarodnih združenjih (IMU, EMS, EPS, IUPAP, IAU, EWP, EWM), posebni uspehi posameznih članov (Gregor Dolinar izvoljen za predsednika IMO 2024-2028, Andrej Guštin imenovan za častnega člana IAU, Matjaž Željko prejel Erdosevo nagrado združenja WFNMC za tehnično podporo matematičnim tekmovanjem), sodelovanje pri organizaciji znanstvenih in strokovnih srečanj ter seminarjev za učitelje (seminarji za mentorje, Presekov seminar, zgodovina matematike), vzpostavljen štipendijski sklad in pridobitev statusa RO v evidenci ARIS, številne aktivnosti za popularizacijo in promocijo znanosti, skrb za dediščino in Plemljevo vilo (natančnejša poročila so dosegljiva v Letnem poročilu društva). Predstavila je tudi glavne cilje delovanja v letu 2025: zaključek cikla državnih tekmovanj 2024/25 in podoben obseg v 2025/26, prijava na nov 3-letni razpis MVI za sofinanciranje DT, priprave in udeležba slovenskih ekip na MMO (Sydney), MFO (Pariz), MEO (Baku), MOAA (Mumbai), EDMO (Priština), MEMO (Chemnitz), EFO (Sofia). Delovanje strokovnih odborov, založniška dejavnost, štipendiranje, organizacija seminarjev in konferenc ter popularizacijskih aktivnosti v podobnem obsegu kot lani, aktivno iskanje novih sponzorjev in rešitev za Plemljevo vilo.

Računovodkinja Simona Puncer Klemenčič je nato predstavila finančno poročilo za leto 2024, dr. Jurij Bajc pa finančni načrt za leto 2025. Opozoril je na nujna vlaganja v Plemljevo vilo, zaradi katerih bi bilo potrebno najeti kredit, ki bi se odplačal v petih letih. Prisotni člani so po krajši razpravi soglasno potrdili letno poročilo ter finančni načrt za naslednje leto, sprejeli pa so tudi sklep o članarini za leto 2026 (25 EUR za redne člane in 10 EUR

za nove člane v letu včlanitve in naslednjih dveh letih).

Sledila je razprava o spremembah statuta. Predlog novega statuta je pripravila komisija v sestavi Gregor Dolinar, Jasna Prezelj in Ciril Dominko, ki ga je tudi predstavil. Cilj sprememb je med cilje delovanja zapisati štipendiranje in finančno podporo mladim, skrb za Plemljevo dediščino, ter zmanjšati Upravni odbor s trenutnih 17 na 7 članov zaradi večje učinkovitosti. Po krajši razpravi so prisotni sprejeli nov statut, ki bo začel veljati s potrditvijo na Upravni enoti, volitve po novem statutu pa se prvič izvedejo v letu 2026.

Prišli smo do slavnostnega dela Občnega zbora. Komisija za priznanja (predsednica Mojca Vilfan, člana Boštjan Kuzman in Ciril Dominko) je podelila dve novi društveni priznanji, ki sta ju prejela mag. Tatjana Štorman, profesorica matematike na Gimnaziji Lava, Celje, in Vincenc Petruna, upokojeni profesor matematike in fizike na Šolskem centru Črnomelj. Nato so prisotni soglasno izvolili dva nova častna člana društva, dr. Marka Razpeta, zaradi njegovih številnih prispevkov k delovanju društva in izjemnega prispevka k popularizaciji matematike in razvoju matematičnega izobraževanja v Sloveniji, in dr. Dragana Mihailovića, zaradi njegovih izrednih prispevkov k razvoju slovenske fizike in njeni prepoznavnosti v mednarodni skupnosti ter za vestno delo predsednika DMFA Slovenije v letih 2016-2020.

Formalni del Občnega zbora se je zaključil s krajšo razpravo v okviru točke razno, na kateri smo potrdili vključitev DMFA Slovenije v mednarodno združenje IMO, podprli predlog Jasne Prezelj za uvedbo nagrade Ivana Vidava za doktorska dela s področja matematike, in se seznanili s projektom digitalizacije arhiva revije Obzornik za matematiko in fiziko, ki ga izvaja Aleksandar Jurišić. Ob zaključku dolgoletnega sodelovanja pa smo se zahvalili tudi računovodkinji Simoni Puncer Klemenčič. Po krajšem odmoru je sledila še Slavnostna akademija ob 75-letnici DMFA Slovenije. Več o tem v posebni novici v eni od naslednjih števil.

*Boštjan Kuzman*

DIAMANTNI SPONZOR DMFA SLOVENIJE



# OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA, JUNIJ 2025

Letnik 72, številka 1

ISSN 0473-7466, UDK 51 + 52 + 53

## VSEBINA

| Članki                                                                             | Strani |
|------------------------------------------------------------------------------------|--------|
| Kako in zakaj vključiti zgodovino matematika v pouk matematike (Jurij Kovič) ..... | 1–11   |
| Lega mavričnih lokov (Dušan Hvalica) .....                                         | 12–21  |
| <b>Novice</b>                                                                      |        |
| Nekrolog: Akademik prof. dr. Gabrijel Kernel (Peter Križan in Marko Mikuž) .....   | 22–25  |
| Enaintrideseto mednarodno tekmovanje študentov matematike (Gregor Šega) .....      | 26–32  |
| Poročilo sestanka predsednikov EMS (Jasna Prezelj) .....                           | 33–38  |
| Zahvala .....                                                                      | 38–39  |
| Vabilo na Konferenco slovenskih matematikov .....                                  | 39     |
| Poročilo o 79. Občnem zboru DMFA Slovenije (Boštjan Kuzman) .....                  | 39–III |

## CONTENTS

| Articles                                                                                      | Pages  |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------|--------|
| Including history of mathematics in teaching of mathematics – how and why (Jurij Kovič) ..... | 1–11   |
| The position of rainbow arcs (Dušan Hvalica) .....                                            | 12–21  |
| <b>News</b> .....                                                                             | 22–III |

**Na naslovnici:** Fotografija dodatne mavrice, pri kateri se poleg primarne mavrice pojavi več šibkih mavric na njenem robu iz pastelnih barv, ki ne sledijo običajnemu redu. Dodatne mavrice so najbolj vidne, ko so kapljice majhne in enako velike, in nastanejo zaradi interference svetlobe na kapljicah. foto: Johannes Bahrtdt, CC