Brihtnež

Elektronska revija za mlade matematike

Letnik 0, številka 1

`http://www.dmfa.si/Brihtnez/BrihtnezIndex.html`

Prvi številki na pot

Dragi učenci in dijaki, učitelji in starši,

pred vami je prva številka e-revije Brihtnež. Namenjena je zlasti učencem višjih razredov osnovnih šol in dijakom srednjih šol, ki so se odločili, da se bodo z matematiko posebej ukvarjali. Prav bo prišla tudi učiteljem, saj bodo v njej našli gradivo za dodatni pouk matematike.

Izbrane teme bodo še posebej primerne za samostojno delo ob pripravah na matematična tekmovanja in delo v matematičnih krožkih. Učiteljem, ki bodo za pripravo na matematična tekmovanja sledili objavljenim prispevkom, priporočamo, da pri dodatnem pouku ali krožku najprej nekaj časa posvetijo teoriji in skrbno preučijo rešene zglede, šele nato naj se lotijo nalog.

Naš namen je dvigniti kvaliteto znanja mladih matematikov, da bi dosegali boljše rezultate na domačih in mednarodnih matematičnih tekmovanjih, zato želimo, da se v poglabljanje znanja vključijo tudi učenci višjih razredov osnovne šole. Doslej, ko so se v priprave na mednarodno matematično olimpiado vključevali dijaki po prvem letniku srednje šole, je bilo sicer opaziti napredek v njihovem matematičnem ustvarjanju, a je bilo vseeno premalo časa za izgradnjo dobrih matematičnih temeljev.

Učenci in dijaki bodo torej s pomočjo elektronske revije samostojno izpopolnjevali svoje znanje, najboljši na državnih tekmovanjih pa se bodo lahko vključili v eno izmed skupin, ki se bosta udeleževali raziskovalnih dni ter zimskih in letnih šol oziroma priprav na mednarodno matematično olimpiado. Prvi skupini se bodo v tem šolskem letu lahko pridružili vsi, ki so bili nagrajeni na 38. tekmovanju za zlato Vegovo priznanje. Drugi skupini se bodo lahko pridružili vsi, ki so bili nagrajeni na državni ravni 46. matematičnega tekmovanja srednješolcev Slovenije, in dijaki, ki jih bodo predlagali mentorji (kot je že bilo v navadi).

Pričakujemo, da bodo učenci in dijaki sproti reševali čim več nalog ter tako poglabljali ali utrjevali svoje znanje. Delo mladih matematikov, ki se bodo vključili v eno izmed omenjenih skupin, želimo posebej spremljati, zato naj bi v predpisanih rokih pošiljali rešitve nekaterih nalog na naslov DMFA Slovenije, Uredništvo revije Brihtnež, Jadranska 19, 1000 Ljubljana. Na strani s kazalom (vsebino) posamezne številke revije bo zapisano, katere naloge naj bi člani ene oziroma druge skupine rešili in odposlali, ter datum, do katerega morajo rešitve prispeti v naše uredništvo.

Elektronska revija Brihtnež bo prosto dostopna na spletnih straneh Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije na naslovu http://www.dmfa.si . DMFA Slovenije dovoljuje natis elektronske revije za individualne potrebe učencev in dijakov ob pripravah na matematična tekmovanja ali potrebe učiteljev pri delu z mladimi matematiki.

V toku enega šolskega leta nameravamo izdati šest številk; prvih 5 številk naj bi izšlo od septembra do februarja, zadnja, šesta številka pa bo namenjena počitniškemu branju in bo izšla koncem šolskega leta. Posamezne številke revije bodo dostopne le v elektronski obliki (PDF datoteka), primerni za natis na liste formata A4. Sprejemali bomo naročila na vezan letnik v knjižni obliki. Če bo naročil dovolj, ga bomo izdali ob zaključku vsakega šolskega leta. Podrobnosti o naročilu in ceni vezanega letnika bomo objavili v eni od prihodnjih številk.

V Ljubljani, oktobra 2002

Uredniški odbor

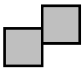
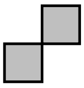
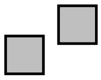
Vsebina

Prispevki so različni po težavnosti: tisti z začetka revije so verjetno lažji in razumljivi tudi učencem višjih razredov osnovnih šol, drugi zahtevajo več matematičnega predznanja, da bi jih v celoti razumeli. Mlajšim nadebudnežem priporočamo, da se skozi prispevke, ki jim delajo težave, prebijajo počasi. Morda najprej počakajo, da se pri pouku ali pri krožku seznanijo s katerim izmed pojmov ali pravil, ki so omenjeni v posameznem prispevku. Kandidati, ki se pripravljajo za nastop na mednarodno matematično olimpiado, bi se pa že morali bolj ali manj sami sprehoditi skozi revijo – ne naenkrat, malo naj bo počasne hoje, nekaj teka in veliko aktivnega počitka s temeljitimi razmisleki.

Kot smo zapisali v uvodu, se bodo najboljši tekmovalci lahko vključili v eno izmed skupin, ki se bosta udeleževali raziskovalnih dni ter zimskih in letnih šol oziroma priprav na mednarodno matematično olimpiado. Člane prve skupine (nagrajene na 38. tekmovanju za zlato Vegovo priznanje) vabimo, da nam pošljejo rešitve nalog 1 in 2 iz prispevka Polinomine ter 2, 11 in 14 iz prispevka Nelinearne diofantske enačbe. Člane druge skupine pa vabimo, da nam pošljejo rešitve nalog 1, 2, 3 in 4 iz prispevka Trikotnik in krožnica. Rešitve (samo v pisni obliki) morajo prispeti na naslov **DMFA Slovenije, Uredništvo revije Brihtnež, Jadranska 19, 1000 Ljubljana**, najkasneje do 14. 11. 2002. Rešitev, prispelih po tem roku, ne bomo upoštevali, in sicer ne glede na vzrok zamude. Prav tako tudi ne bomo upoštevali rešitev, poslanih po elektronski pošti.

Polinomine

Z imenom *polinomine* označujemo like, ki jih dobimo s sestavljanjem skladnih kvadratov tako, da je presek dveh sosednjih kvadratov skupna stranica. Torej nobena izmed

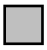
 ,  oziroma 

ni polinomina.

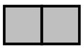
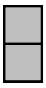
Glede na število kvadratov, ki jih sestavljajo, delimo polinomine na *monomine* (sestavlja jih po 1 kvadrat), *domine* (2 kvadrata), *trinomine* (3 kvadrati), *tetromine* (4 kvadrati), *pentomine* (5 kvadratov), *heksomine* (6 kvadratov) itn.

Za te like so se matematiki začeli posebej zanimati v začetku druge polovice preteklega stoletja, zlasti po letu 1957, ko se je o njih razpisal Martin Gardner v *Scientific American*.

Očitno je, da obstaja ena sama monomina oziroma da je vsaka monomina oblike

 .

Prav tako obstaja ena sama domina, saj predstavljata sliki

 in 

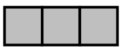
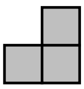
isti lik, le da je na eni izmed slik zasukan za 90°. Kljub temu si v zvezi z domino lahko zastavimo nalogo:

Na katerega od naštetih pravokotnikov razsežnosti $m \times n$ ni mogoče popolnoma in brez prekrivanja položiti celega števila domin?

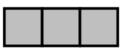
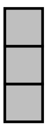
(**A**) 3×4 (**B**) 3×5 (**C**) 4×4 (**D**) 4×5 (**E**) 6×3

Pravilni odgovor je seveda (**B**), saj je med naštetimi pravokotniki edini, ki ga sestavlja liho število enotskih kvadratov.

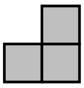
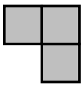
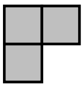
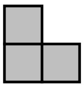
Obstajata dve trinomini, in sicer

 in  .

Sliki

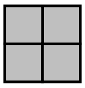
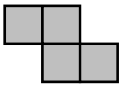
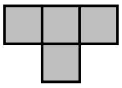
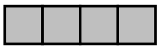
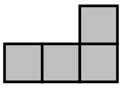
 in 

predstavljata isto trinomino, prav tako je na slikah

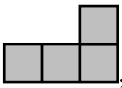
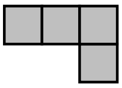
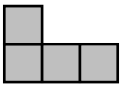
, ,  in 

ista trinomina.

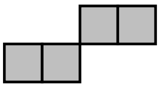
Različnih tetromin je pet, to so

, , ,  in .

Opozorimo še, da tetromine

,  in 

niso med seboj različne, saj lahko s premikom, zrcaljenjem ali vrtenjem katerekoli izmed njih pokrijemo drugi dve. Lika

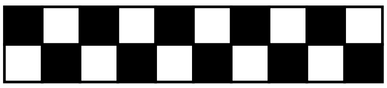
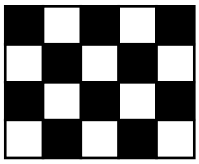


ne štejemo med tetromine, saj imata srednja kvadrata skupno le oglišče. (Gotovo te tetromine spominjajo na popularno računalniško igrico tetris.)

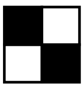
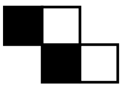
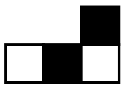
Poskusimo zdaj rešiti naslednjo nalogo:

Zgled 1. *Ali je mogoče iz 5 različnih tetromin oblikovati pravokotnik? Če ni, zakaj ne? (Nasvet: pravokotnik in tetromine pobarvaj kot šahovnico.)*

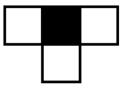
Rešitev. Tetromine so sestavljene iz po 4 kvadratov. Različnih je 5. Skupaj jih torej sestavlja 20 kvadratov. Možna pravokotnika sta zato 10×2 in 5×4. Upoštevajmo nasvet in v njih izmenično pobarvajmo kvadratke

 ,

pa vidimo, da je v obeh enako mnogo belih kot črnih kvadratkov. Tako se zgodi tudi pri tetrominah

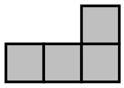
, ,  in ,

le pri tetromini



so trije kvadratki enake barve, eden pa drugačne. Skupno je torej 11 kvadratkov ene barve in 9 kvadratkov druge barve. Zato iz vseh 5 različnih tetromin ni mogoče sestaviti pravokotnika.

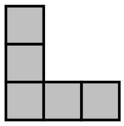
Tudi na tekmovanju *Evropski matematični kenguru* so se že pojavljale naloge v zvezi s polinominami, npr.:



Zgled 2. *Iz tetromin, imenovanih L (glej sliko), sestavljamo pravokotnike. Katerega od naštetih pravokotnikov razsežnosti $m \times n$ ni mogoče sestaviti?*

(**A**) 4×4 (**B**) 6×6 (**C**) 8×8 (**D**) 4×6 (**E**) 6×8

Rešitev. Pravilni odgovor je (**B**). Iz dveh L-tetromin lahko sestavimo pravokotnik razsežnosti 4×2. Le-tega sestavlja 8 enotskih kvadratov. Vse naštete pravokotnike, razen pravokotnika **B**, pa sestavlja nek večkratnik števila 8 enotskih kvadratov.



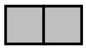
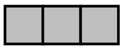
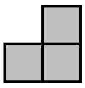
Zgled 3. *Največ koliko pentomin, imenovanih V (glej sliko), lahko položimo na kvadrat velikosti 5×5, ne da bi se med seboj prekrivale?*

(**A**) *2*   (**B**) *3*   (**C**) *4*   (**D**) *5*   (**E**) *6*

Rešitev. Pravilni odgovor je (**C**). Ker je kvadrat sestavljen iz 25 kvadratkov, nanj ne moremo položiti več kot $25 : 5 = 5$ pentomin. Hitro uvidimo, da ni možno hkrati pokriti vseh 4 oglišč kvadrata, zato 5 pentomin nanj ne moremo položiti. Kako je to možno storiti s štirimi, razišči sam.

Obseg polinomin

Zanimivo je tudi raziskati, kako se spreminja obseg polinomin. Izpolni naslednjo preglednico (predpostavi, da je dolžina stranice kvadrata 1 (enota)):

polinomina	njen obseg	
monomina		
domina		
trinomina		 in 

Se ti zdi, da si odkril-a kakšno pravilo? Ali sedaj lahko napoveš, kolikšen je obseg tetromin?

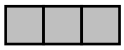
polinomina	njen obseg
tetromina	

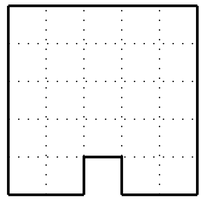
Je bila napoved pravilna? Si predvidel-a dve različni vrednosti obsega? Sklep je včasih preuranjen. Odvisnost se pogosto spremeni od tiste, ki se pojavi na začetku.

Sestavi novo preglednico in ugotovi najmanjši in največji obseg. Nato v isti koordinatni ravnini nariši točke, ki pripadajo urejenim parom (polinomina, najmanjši obseg) z eno barvo, točke, ki pripadajo urejenim parom (polinomina, največji obseg) pa z drugo barvo.

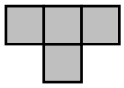
polinomina	najmanjši obseg	največji obseg
monomina		
domina		
trinomina		
tetromina		
pentomina		
heksomina		

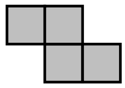
Naloge

1. Ali je mogoče s trinominami  brez prekrivanja in vrzeli pokriti lik na desni? (Nasvet: V trinomini pobarvaj vsak kvadratek z drugačno barvo. Tudi v liku uporabi enak način barvanja.)



2. Na sliki sta tetromini, imenovani T in Z:





   (a) Iz štirih tetromin T oblikuj kvadrat.

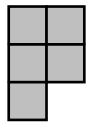
   (b) Uporabi T-je in Z-je in oblikuj pravokotnike razsežnosti 4×5, 4×6, 4×7, 4×8 in 4×9.

   (c) Razloži, zakaj kvadrata razsežnosti 5×5 ne moreš sestaviti iz T-jev in Z-jev.

3. Koliko različnih pentomin obstaja? Uporabi karirast papir in jih nariši.

4. Katere pentomine lahko s pregibanjem po stranicah kvadratov preoblikuješ v škatle brez pokrova? Izreži jih in preveri svoje odgovore.

5. Na voljo imaš mnogo pentomin, imenovanih P (glej sliko).



   (a) Koliko jih porabiš za sestavljanje pravokotnika razsežnosti 5×2?

   (b) Iz njih sestavi pravokotnik razsežnosti 5×4 na tri različne načine (nobenega ne dobiš z zrcaljenjem ali vrtenjem drugega).

   (c) Ali lahko iz samih P-jev sestaviš kvadrat razsežnosti 5×5? Utemelji.

   (d) Kolikšne so razsežnosti najmanjšega kvadrata, ki ga je mogoče sestaviti iz samih P-pentomin? Nariši, kako je to mogoče storiti.

6. Nariši čim več različnih heksomin (vseh je 35). Katere predstavljajo mreže kocke?

Literatura in dodatne informacije:

B. Henry, *Newton Student Notes*, AMT Publishing, Canberra, Australia, 2002.

G. Dolinar, D. Felda, M. Željko, *Evropski matematični kenguru 1996-2001*, DMFA – Založništvo, Ljubljana, 2002.

http://math.rice.edu/~lanius/Lessons/Polys/poly1.html

http://www.ics.uci.edu/~eppstein/junkyard/polyomino.html

http://frey.newcastle.edu.au/OMA/polyomino/p1.html

http://www.xprt.net/~munizao/polycover/

http://www.andrews.edu/~calkins/math/pentos.htm

http://www.geocities.com/alclarke0/PolyPages/Polyominoes.html

Nelinearne diofantske enačbe

Diofant iz Aleksandrije je znan kot oče algebre. O njegovem življenju ni znanega skoraj ničesar, ne ve se zagotovo niti, kdaj je živel. To, da je najbrž živel v 3. stoletju, sklepamo iz zapisov v njegovih delih oziroma iz zapisov, v katerih so matematiki, ki so živeli za njim, omenjali njegovo ime. V *Grški antologiji*, ki je nastala okrog leta 500, najdemo med matematičnimi problemi tudi uganko o Diofantu. Če jo rešimo, dobimo nekaj podatkov o njegovem življenju, vendar ne vemo, ali ni uganka le plod domišljije. Takole pravi:

> *Bog mu je dal živeti šestino življenja kot dečku, po naslednji dvanajstini življenja mu je na licih pognal puh in po naslednji sedmini se je oženil. Pet let za tem se mu je rodil sin, ki je živel le pol toliko let kot on sam. Kruta usoda mu ga je vzela štiri leta pred smrtjo.*

Diofant je napisal tri dela, to so *Porizmi*, *Poligonalna števila* in *Aritmetika*. Prvo je povsem izgubljeno, od drugega je ostal le odlomek, od tretjega, ki je obsegal 13 knjig, pa je ostalo še šest knjig. Prav v *Aritmetiki* je opisal, kako rešujemo algebrske enačbe, ki nimajo natanko ene rešitve, in od tod izhaja tudi ime *diofantske enačbe*.

Nelinearne diofantske enačbe so take enačbe s celoštevilskimi koeficienti, v katerih ne nastopajo neznanke le v prvi potenci, ampak tudi v višjih. V takih enačbah torej lahko srečamo npr. x^2, xy, y^3 ... Takih enačb v splošnem ni mogoče enostavno rešiti. Tu si bomo ogledali nekaj metod, s katerimi lahko rešimo nekatere preproste nelinearne diofantske enačbe.

A. Metoda zmnožka

Začetno enačbo preoblikujemo tako, da je na eni strani enačbe zmnožek izrazov, ki vsebujejo neznanke, na drugi pa celo število, ki ga zapišemo kot zmnožek dveh števil na vse možne načine. S primerjanjem leve in desne strani pridemo do ustreznih rešitev. Oglejmo si nekaj primerov.

Zgled 1. *Reši enačbo $xy + 2x = 5$ v množici celih števil.*

Rešitev. Če na levi izpostavimo x, dobimo $x(y+2) = 5$. Ker je $5 = 1 \cdot 5 = 5 \cdot 1 = (-1) \cdot (-5) = (-5) \cdot (-1)$, pridemo do štirih rešitev:

$$\begin{array}{ll} x = 1,\ \ y+2 = 5 \Rightarrow y = 3, & \quad x = 5,\ \ y+2 = 1 \Rightarrow y = -1, \\ x = -1,\ \ y+2 = -5 \Rightarrow y = -7, & \quad x = -5,\ \ y+2 = -1 \Rightarrow y = -3. \end{array}$$

Štirje pari neznank x in y rešijo enačbo, kar označimo:

$$(x, y) \in \{(1, 3),\ (5, -1),\ (-1, -7),\ (-5, -3)\}.$$

Zgled 2. *Poišči vsa cela števila x in y, za katera je $xy + x - 3y = 10$.*

Rešitev. Če na levi strani enačbe izpostavimo x, dobimo $x(y+1)-3y=10$. Sedaj je očitno, da bomo levo stran lahko zapisali v obliki zmnožka, če na obeh straneh enačbe odštejemo 3. Tedaj imamo

$$\begin{aligned} x(y+1)-3y-3 &= 10-3 \\ x(y+1)-3(y+1) &= 7, \\ (x-3)(y+1) &= 7. \end{aligned}$$

Zaradi $7=1\cdot 7=7\cdot 1=(-1)\cdot(-7)=(-7)\cdot(-1)$ imamo podobno kot prej:

$x-3=1\Rightarrow x=4$, $y+1=7\Rightarrow y=6$, $\quad x-3=7\Rightarrow x=10$, $y+1=1\Rightarrow y=0$,

$x-3=-1\Rightarrow x=2$, $y+1=-7\Rightarrow y=-8$, $\quad x-3=-7\Rightarrow x=-4$, $y+1=-1\Rightarrow y=-2$

in zapišemo rešitev:

$$(x,y)\in\{(4,6),\ (10,0),\ (2,-8),\ (-4,-2)\}.$$

Zgled 3. *Naj bodo dolžine stranic pravokotnega trikotnika naravna števila in naj ima ena izmed katet dolžino* 15. *Poišči dolžini drugih dveh stranic. Koliko je različnih pravokotnih trikotnikov s to lastnostjo?*

Rešitev. Naj bo c dolžina hipotenuze, a pa dolžina druge katete. Tedaj po Pitagorovem izreku velja $c^2-a^2=15^2$ oziroma $(c+a)(c-a)=225$. Zagotovo je $c+a>c-a$, števili $c+a$ in $c-a$ pa sta pozitivni, zato pišemo $225=225\cdot 1=75\cdot 3=45\cdot 5=25\cdot 9$.
Tako imamo štiri možnosti:

$$\begin{aligned} c+a &= 225 \\ c-a &= 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} c+a &= 75 \\ c-a &= 3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} c+a &= 45 \\ c-a &= 5 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} c+a &= 25 \\ c-a &= 9 \end{aligned}$$

Lotimo se prve možnosti. Če po stolpcih seštejemo, kar imamo v enačbah, dobimo $2c=226$, odtod pa $c=113$. Iz druge enačbe izrazimo $a=c-1$, pa imamo še $a=112$. Prvi trikotnik z opisano lastnostjo ima kateti dolgi 112 in 15, hipotenuzo pa 113.
Na podoben način dobimo še tri rešitve: 36, 15, 39; 20, 15, 25 in 8, 15, 17. Obstajajo torej štirje pravokotni trikotniki z opisano lastnostjo.

Zgled 4. *Poišči vse celoštevilske rešitve enačbe* $x^2-2y-y^2=21$.

Rešitev. Dano enačbo lahko zapišemo v obliki $x^2-(y^2+2y)=21$, od koder vidimo, da moramo na levi odšteti 1, če želimo imeti v oklepaju popolni kvadrat. Tako dobi enačba obliko $x^2-(y^2+2y+1)=20$ oziroma $x^2-(y+1)^2=20$. Razliko kvadratov lahko razstavimo $(x+(y+1))(x-(y+1))=20$ in odpravimo notranje oklepaje $(x+y+1)(x-y-1)=20$.
Premislimo, da sta faktorja $x+y+1$ in $x-y-1$ enake parnosti. Njuna razlika $(x+y+1)-(x-y-1)=x+y+1-x+y+1=2y+2=2(y+1)$ je sodo število. Tako lahko zapišemo $x+y+1=(x-y-1)+2(y+1)$. Če je število $x-y-1$ sodo, je tudi število $x+y+1$ sodo, saj se zapiše kot vsota dveh sodih števil. Če pa je število $x-y-1$ liho, je tudi število $x+y+1$ liho, saj se zapiše kot vsota lihega in sodega števila.
Vidimo, da je zmnožek enak 20, torej sodo število, zato sta oba faktorja soda. Pišimo $20=10\cdot 2=2\cdot 10=(-10)\cdot(-2)=(-2)\cdot(-10)$, pa pridemo do štirih možnosti:

$$\begin{aligned} x+y+1 &= 10 \\ x-y-1 &= 2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x+y+1 &= 2 \\ x-y-1 &= 10 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x+y+1 &= -10 \\ x-y-1 &= -2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x+y+1 &= -2 \\ x-y-1 &= -10 \end{aligned}$$

Tudi tokrat nam pride zelo prav seštevanje po stolpcih, ki smo ga srečali v rešitvi primera 3. Z malo računanja dobimo rešitve $(x,y)\in\{(6,3),\ (6,-5),\ (-6,-5),\ (-6,3)\}$.

Naloge

1. Poišči vse celoštevilske rešitve enačbe $2x - xy = 7$.
2. Zmnožek dveh naravnih števil je trikrat večji od njune vsote. Določi vse pare naravnih števil s to lastnostjo.
3. Zmnožek števil 12 in 60 je desetkrat večji od njune vsote. Poišči še druge pare naravnih števil s to lastnostjo.
4. Dokaži, da enačba $x^2 - y^2 = 2002$ nima celoštevilskih rešitev.
5. Poišči vsa cela števila x in y, za katera je $x^2y^2 = 3y^2 + x^2$.
6. Poišči vsa cela števila x in y, za katera je $x^2 - xy - 2y^2 = 18$.
7. Med vsemi pravokotnimi trikotniki s celoštevilskimi dolžinami stranic, ki imajo eno kateto dolgo 55, poišči tistega, ki ima najkrajšo hipotenuzo.

B. Metoda količnika

Ta metoda je podobna Eulerjevi metodi za reševanje linearnih diofantskih enačb. Pri tem eno neznanko izrazimo z drugo, dobljeni ulomek pa zapišemo kot vsoto dveh členov, od katerih je eden celo število. Nato obravnavamo različne možnosti. Spet si bomo ogledali nekaj primerov.

Zgled 5. *Poišči vse pare naravnih števil x in y, za katere je $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{5}$.*

Rešitev. Če dano enačbo pomnožimo s $5xy$, dobimo $5y + 5x = xy$. Kot vemo, moramo pri množenju enačbe z nekim izrazom vedno premisliti, ali ni morda izraz lahko enak nič in tak slučaj posebej obravnavati. Ker sta v našem primeru x in y naravni števili, izraz $5xy$ ne more biti enak 0. Lahko torej nadaljujemo. Odločimo se, da bomo y izrazili z x, zato pišemo po vrsti $xy - 5y = 5x$, $y(x - 5) = 5x$ in $y = \frac{5x}{x-5}$. Tu smo delili z $x - 5$, zato $x - 5$ ne sme biti enak 0 oziroma x ne sme biti enak 5.
Ustavimo se nekoliko pri tem – vprašajmo se, kaj se zgodi, če dopustimo $x = 5$. Vstavimo $x = 5$ v začetno enačbo: $\frac{1}{5} + \frac{1}{y} = \frac{1}{5}$, od koder sledi $\frac{1}{y} = 0$. To seveda ni mogoče, saj je y naravno število in je zato $\frac{1}{y} > 0$, torej med rešitvami ni takih parov (x, y), ki bi imeli $x = 5$.
Nadaljujmo z iskanjem rešitve. Ulomek $\frac{5x}{x-5}$ zapišimo kot vsoto dveh členov, pri čemer je en člen celo število: $\frac{5x-25+25}{x-5} = \frac{5(x-5)+25}{x-5} = 5 + \frac{25}{x-5}$. Ker iščemo naravno število $y = 5 + \frac{25}{x-5}$, mora biti $x - 5$ delitelj števila 25. Vemo, da je x naravno število, zato imamo le možnosti $x_1 = 6$, $x_2 = 10$ in $x_3 = 30$ z ustreznimi $y_1 = 30$, $y_2 = 10$ in $y_3 = 6$. Imamo torej tri pare rešitev: $(x, y) \in \{(6, 30),\ (10, 10),\ (30, 6)\}$.

Zgled 6. *Poišči vse pare celih števil x in y, za katere je $xy - 2x + 5y - 5 = 0$.*

Rešitev. Denimo, da bomo y izrazili z x, zato enačbo preoblikujemo: $y(x + 5) = 2x + 5$, $y = \frac{2x+5}{x+5}$, $y = \frac{2(x+5)-5}{x+5}$, $y = 2 - \frac{5}{x+5}$. V tem postopku smo enačbo delili z $x + 5$, zato premislimo, kaj bi bilo, če bi bil ta izraz enak 0. Izraz $x + 5$ je enak 0 le, če zavzame neznanka x vrednost -5. Toda tedaj se začetna enačba zapiše v obliki $-5y + 10 + 5y - 5 = 0$ oziroma $5 = 0$, kar seveda ne drži, in $x = -5$ ni med rešitvami enačbe.
Rešitve začetne enačbe bomo našli z obravnavanjem enačbe $y = 2 - \frac{5}{x+5}$. Ker mora biti y celo število, mora biti tudi $\frac{5}{x+5}$ celo število, to pa je možno le, če je $x + 5$ enak ± 1 ali ± 5. Ugotovimo

torej, da lahko x zavzame vrednosti -4, -6, 0 ali -10. Pri vsaki od naštetih vrednosti neznanke x izračunamo ustrezno vrednost neznanke y: -3, 7, 1 oziroma 3. Enačba ima štiri pare rešitev: $(x, y) \in \{(-10, 3),\ (-6, 7),\ (-4, -3),\ (0, 1)\}$.

Zgled 7. *Poišči vse pare celih števil x in y, za katere je* $\frac{1}{x} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{y} = 1$.

Rešitev. Premisliti moramo, ali ni morda xy enak 0. Kot smo že prej zapisali, je treba take slučaje posebej obravnavati. Spomnimo se, da rešitve iščemo med pari celih števil x in y, torej sta tako x kot y lahko enaka nič. Toda prav hitro vidimo, da vse pare celih števil (x, y), kjer je vsaj eno izmed števil enako 0, brez škode opustimo, saj zagotovo ne rešijo dane enačbe (v enačbi nastopi deljenje z 0).
V resnici torej iščemo pare neničelnih celih števil, ki rešijo dano enačbo, zato le-to pomnožimo z xy. Dobimo $y + 1 + x = xy$. Od tod gre pot podobno kot pri prejšnjem primeru – izrazimo $y = \frac{x+1}{x-1} = \frac{x-1+2}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}$. Toda že spet smo delili – tokrat z $x - 1$, ki je enak 0, če x zavzame vrednost 1. Preveriti moramo, kaj pravi enačba, če namesto x vstavimo 1: $1 + \frac{1}{y} + \frac{1}{y} = 1$ oziroma $\frac{2}{y} = 0$. Ker enačbe v tem slučaju ne reši nobeno celo število, med rešitvami ne bo parov celih števil (x, y), kjer bi bil x enak 1.
Končno se osredotočimo na izraz $1 + \frac{2}{x-1}$. Ta bo enak celemu številu le, če bomo izbrali $x - 1 = \pm 1$ ali $x - 1 = \pm 2$. Neznanka x je lahko enaka 2, 0, 3 ali -1. Ker smo že premislili, da x ne more biti enak 0, ostanejo le preostale tri možnosti. Tako izračunamo še ustrezne vrednosti neznanke y: 3, 2, 0, zadnja pa seveda ni dobra, saj niti y ne sme biti enak 0.
Enačbo rešita le dva para celih števil: $(x, y) \in \{(2, 3),\ (3, 2)\}$.

Zgled 8. *Koliko je pravokotnikov, katerih dolžine stranic so naravna števila in katerih obseg je številsko enak ploščini?*

Rešitev. Naj bosta a in b dolžini stranic pravokotnika in torej naravni števili. Ker je obseg številsko enak ploščini, velja $2a + 2b = ab$. Od tod izrazimo $b = \frac{2a}{a-2} = \frac{2a-4+4}{a-2} = \frac{2(a-2)+4}{a-2} = 2 + \frac{4}{a-2}$. Delili smo z $a - 2$, ki je enak 0, če izberemo $a = 2$. Toda enačba se pri vrednosti $a = 2$ glasi $4 + 2b = 2b$ oziroma $4 = 0$, kar ne drži, zato $a = 2$ ni njena rešitev.
Izbirati moramo taka naravna števila a (različna od 2), da bo tudi $b = 2 + \frac{4}{a-2}$ naravno število. Tako pridemo do parov $(a, b) \in \{(3, 6),\ (4, 4),\ (6, 3)\}$. Ti trije pari naravnih števil rešijo enačbo $2a + 2b = ab$. Pravokotnika, katerih dolžine stranic so naravna števila in katerih obseg je številsko enak ploščini, pa sta le dva: eden je v resnici kvadrat, ki ima dolžino stranice enako 4, drugi pa ima stranici z dolžinama 3 in 6 (če vzamemo stranici z dolžinama 6 in 3, pomeni, da isti pravokotnik le zavrtimo).

Naloge

8. Poišči vse pare celih števil x in y, ki rešijo enačbo $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3}$.
9. Poišči vsa dvomestna števila, ki so enaka dvakratnemu zmnožku svojih števk.
10. Majo so vprašali, koliko sta stara njena mlajša brata. Povedala je: "*Če seštejemo zmnožek in vsoto njunih let, dobimo* 34." Koliko sta stara?
11. Poišči najmanjše naravno število, ki da pri deljenju s 5 ostanek 4, njegov kvadrat pa da pri deljenju s 25 ostanek 21.
12. Katero štirimestno število, katerega prvi dve in zadnji dve števki sta med seboj enaki, je popolni kvadrat?

C. Metoda vsote kvadratov

Eno stran enačbe prevedemo v vsoto kvadratov tako, da na drugi strani ni neznank, nato pa upoštevamo, da imamo opravka s celimi števili, in pregledamo vse možnosti, ki pridejo v upoštev.

Zgled 9. *Poišči vse pare celih števil x in y, za katere je $x^2 + y^2 = 2x$.*

Rešitev. Enačbo preuredimo v $x^2 - 2x + y^2 = 0$. Če prištejemo na obeh straneh enačbe število 1, dobimo $x^2 - 2x + 1 + y^2 = 1$ oziroma $(x-1)^2 + y^2 = 1$. Na levi strani imamo zapisano vsoto kvadratov, ki sta nenegativni celi števili. Ker je njuna vsota enaka 1, imamo le dve možnosti:
- $(x-1)^2 = 1$ in $y^2 = 0$, kar pomeni, da je $x - 1$ lahko enak 1 ali -1 in $y = 0$,
- $(x-1)^2 = 0$ in $y^2 = 1$, kar pomeni, da je $x - 1 = 0$, y pa je lahko 1 ali -1.

Tako pridemo do štirih parov celih števil, ki rešijo enačbo. To so: $(2, 0)$, $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(1, -1)$.

Zgled 10. *Kateri pari celih števil x in y rešijo enačbo $x^2 + y^2 = 2x - 4y - 5$?*

Rešitev. Enačbo preoblikujemo v $x^2 - 2x + y^2 + 4y = -5$, nato pa levo stran dopolnimo do popolnih kvadratov: $x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 = -5 + 1 + 4$. Seveda smo enaki števili prišteli tudi na desni strani enačbe. Če enačbo zapišemo v obliki $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 0$, vidimo, da je le-ta izpolnjena le, če izberemo $(x-1)^2 = 0$ in $(y+2)^2 = 0$. Enačbo reši en sam par števil: $x = 1$, $y = -2$.

Zgled 11. *Poišči vse pare celih števil x in y, ki rešijo enačbo $x^4 + y^2 = 2(y + 1)$.*

Rešitev. Najprej pišemo $x^4 + y^2 - 2y = 2$, nato $x^4 + y^2 - 2y + 1 = 3$ in končno $x^4 + (y-1)^2 = 3$. Ker je vsota dveh nenegativnih celih števil enaka 3, je možno le $0 + 3 = 1 + 2 = 2 + 1 = 3 + 0$. Toda v vsaki od naštetih možnosti je vsaj en seštevanec, ki ni popolni kvadrat celega števila, zato dane enačbe ne reši noben par celih števil.
Če bi postavili, na primer, $x^4 = 1$ (od koder bi sledilo $x^2 = 1$ in $x = 1$ ali $x = -1$), bi morali vzeti $(y-1)^2 = 2$, a takega celega števila y, da bi to veljalo, ni.

Zgled 12. *Poišči vsa cela števila x, y in z, za katera velja enačba $x^6 + y^4 + z^2 + 26 = 2x^3 + 8y^2 - 6z$.*

Rešitev. V enačbi nastopajo tri neznanke, zato bomo skušali dobiti na levi strani enakosti vsoto treh popolnih kvadratov. Po vrsti pridemo do $x^6 - 2x^3 + y^4 - 8y^2 + z^2 + 6z + 26 = 0$, $x^6 - 2x^3 + 1 + y^4 - 8y^2 + 16 + z^2 + 6z + 9 = 0$ in $(x^3 - 1)^2 + (y^2 - 4)^2 + (z + 3)^2 = 0$. Vsota treh kvadratov je enaka nič natanko tedaj, ko je vsak izmed njih enak nič oziroma mora biti že izraz pod kvadratom enak nič. Zato morajo biti hkrati izpolnjene enačbe $x^3 - 1 = 0$, $y^2 - 4 = 0$ in $z + 3 = 0$. Rešitev prve enačbe je $x = 1$, rešitev tretje $z = -3$, druga enačba pa ima dve rešitvi, saj dobimo $y^2 = 4$, če izberemo $y = 2$ ali $y = -2$.
Za trojico (x, y, z), ki reši dano enačbo, imamo na voljo dve izbiri: $(1, 2, -3)$ in $(1, -2, -3)$.

Naloge

13. Poišči vse pare celih števil x in y, ki rešijo enačbo $x^2 + y^2 - 8y + 15 = 0$.

14. Kateri pari celih števil a in b rešijo enačbo $a^2 + b^2 + 4^2 = 6b - 4a + 5$?

15. Ali ima enačba $x^2 + y^2 + z^2 = 7$ celoštevilske rešitve?

D. Metoda zadnje števke

Pri tej metodi opazujemo, s katero števko se lahko konča leva stran enačbe, kjer nastopajo neznanke. Ko to primerjamo z desno stranjo, ugotovimo, ali ima enačba cele rešitve ali ne.

Zgled 13. *Ali lahko najdemo par naravnih števil x in y, ki reši enačbo $x^2 + 5y = 2002$?*

Rešitev. Najprej premislimo, s katero števko se konča kvadrat naravnega števila. Dovolj je pogledati enice kvadratov 0^2, 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2, 8^2 in 9^2, ki so po vrsti 0, 1, 4, 9, 6, 5, 6, 9, 4 in 1. Kvadrat naravnega števila se torej lahko konča le z eno izmed števk 0, 1, 4, 5, 6 in 9. Ker se zmnožek $5y$ lahko konča le s števko 0 ali 5, se tudi vsota $x^2 + 5y$ lahko konča le z eno izmed števk 0, 1, 4, 5, 6 in 9 in se ne more končati s števko 2. Dana enačba zato ni rešljiva z naravnima številoma x in y.

Zgled 14. *Dokaži, da enačba $x^4 + y^2 = 200120022003$ nima celoštevilske rešitve.*

Rešitev. V rešitvi prejšnjega primera smo premislili, da se kvadrat naravnega (in seveda tudi celega) števila lahko konča s števkami 0, 1, 4, 5, 6 ali 9. Od tod lahko sklepamo, da se četrta potenca lahko konča le s števkami 0, 1, 5 ali 6. Vsota četrte potence in kvadrata celega števila se torej lahko konča s števkami 0, 1, 2, 4, 5, 6, 7 ali 9. Na desni strani enakosti nastopa število, ki se konča s števko 3, zato enačba nima celoštevilske rešitve.

Naloge

16. Ali ima enačba $x^4 + y^4 = 200220032004$ celoštevilske rešitve?

17. Dokaži, da enačba $5^x + 6^y = 98765432$ nima celoštevilske rešitve.

18. Ali obstaja par celih števil x in y, ki reši enačbo $3^x + 4^y = 4003002001$?

Literatura

D. Burić, *Nelinearne diofantske jednačine*, Triangle **5** (2001/02),str. 102 – 106 in str. 153 – 159.

J. Grasselli, *Diofantske enačbe*, DMFA Slovenije, Ljubljana, 1984.

I. Hafner, *Diofantske enačbe*, Logika in razvedrilna matematike **4**/6 (1994/95), str. 21 – 24.

E. Kramar, *Diofantske enačbe v elementarni geometriji*, Presek **16** (1988/89), str. 274 – 280.

F. Križanič, *Diofantske enačbe*, Presek **5** (1977/78), str. 134 – 141 in str. 178.

Risanje skic pri geometriji

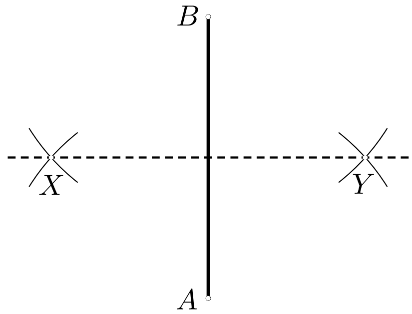
Pri geometrijskih nalogah je običajno potrebno narisati skico. Včasih to zahteva že naloga sama, pogosto narišemo skico zato, da si sploh predstavljamo, kaj naloga zahteva. Pri težjih gemetrijskih nalogah pa lahko najdemo pot do rešitve samo s pomočjo z natančno narisane skice. Oglejmo si nekaj osnovnih napotkov pri risanju skic.

Najprej izberimo primerno orodje: svinčnik, radirko, šestilo in ravnilo. Seveda ni odveč poudariti, da morata biti svinčnik in šestilo ošiljena. Ali veste kako pravilno ošilimo šestilo? Konice ne smemo ošiliti s šilčkom, ampak le zbrusiti s smirkovim papirjem v obliko prirezanega valja, ki "gleda navznoter" – proti drugemu kraku šestila.

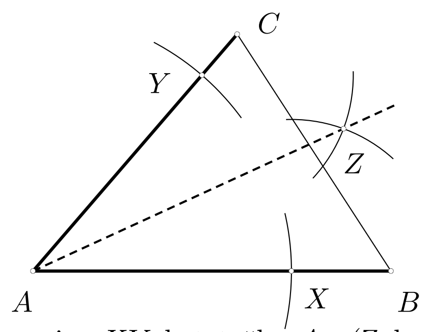
Izogibati se moramo risanju skic s kemičnim svinčnikom – v primeru napake se take skice ne da popraviti. Še več: črta, narisana s kemičnim svinčnikom, na sliki izstopa in pritegne pozornost. V začetni fazi iskanja poti do rešitve se tako naša misel vseskozi vrača k že narisanim črtam in le stežka ugledamo kakšno skrito krožnico ali premico.

Pri risanju lahko uporabljamo tudi geotrikotnik, vendar moramo biti zaradi možnosti, ki nam jih to orodje ponuja, nadse pazljivi. Zaradi narisanega merila in kotomera je približna metoda za risanje simetral daljic oz. kotov zelo razširjena. Daljico ali kot pomerimo, izmerjeno vrednost delimo z 2 in slednje narišemo. **Tej metodi se moramo pri risanju natančnih skic izogniti.** Zakaj? Izkušnje kažejo, da običajno rišemo izmerjene vrednosti na 1 mm oz. 1 kotno stopinjo natančno. Pri sestavljenih geometrijskih nalogah je pogosto potrebno zapovrstjo narisati več krožnic ali premic, katerih lega je odvisna od že narisanih točk (oz. premic ali krožnic). Torej se nenatančnost pri risanju z vsako potezo krepko povečuje in po nekaj korakih je lega točk določena le še na nekaj mm natančno. In ko je nazadnje skica narisana in je potrebno npr. dokazati, da so točke X, Y in Z kolinearne, na sliki pa je točka Z npr. 1 cm oddaljena od premice skozi X in Y, bo le malokdo verjel, da je naloga sploh pravilno zastavljena.

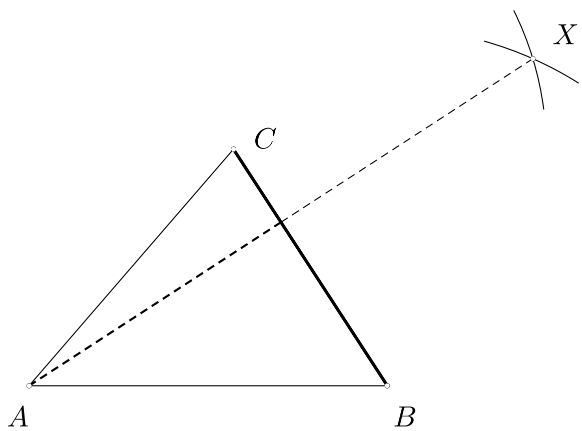
Kakšna pa je potemtakem pravilna metoda za risanje simetral daljic oz. kotov?



Risanje simetrale daljice. Dana je daljica AB. S šestilom narišemo krožnico s središčem v točki A, katere polmer meri med približno $\frac{2}{3}$ in $\frac{3}{4}$ dolžine daljice AB. (To seveda določimo "na oko". Idealna dolžina polmera je $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 70.7\%$ dolžine daljice AB, saj bi se v tem primeru v nadaljevanju konstruirani krožnici sekali pravokotno in je tako presečišče najbolj natančno določeno.) Nato narišemo še krožnico s središčem v B in z **enakim polmerom**. (Na tem mestu je pomembno, da uporabljamo dovolj "trdo šestilo", da sta krožnici zares enakih polmerov.) Iskana simetrala je premica, ki poteka skozi presečišči krožnic. (Na sliki sta presečišči označeni z X in Y, v praksi pa teh dveh točk ne označimo, saj gre le za pomožni konstrukcijski točki. Še več: da bo skica bolj pregledna, pobrišemo tudi krožnici oz. krožna loka, s pomočjo katerih smo simetralo konstruirali.)

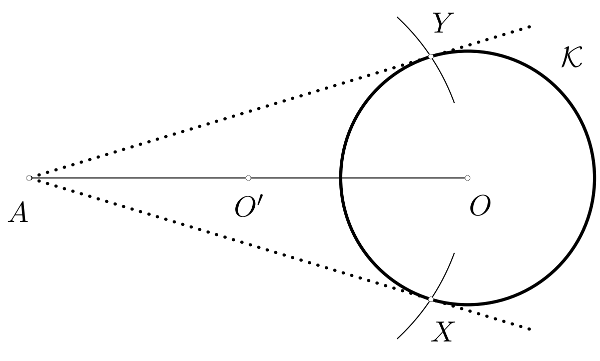


Risanje simetrale kota. Želimo narisati simetralo kota BAC trikotnika ABC. Ker v splošnem trikotnik ABC ni enakokrak, najprej s pomočjo (poljubne) krožnice s središčem v A na stranicah AB in AC določimo točki X in Y, da je $|AX| = |AY|$. Simetrala daljice XY je potem simetrala kota BAC in lahko sledimo prejšnji konstrukciji: narišemo krožnici **enakih** polmerov (med približno $\frac{2}{3}|XY|$ in $\frac{3}{4}|XY|$) s središčema v X in Y. Simetrala daljice XY poteka skozi presčišči teh dveh krožnic. V resnici zadošča narisati le eno presečišče – tisto, ki leži na drugem bregu premice XY kot točka A. (Zakaj izberemo ravno to presečišče? Relativna napaka pri risanju premice bo najmanjša, ko narišemo premico skozi bolj oddaljeni točki.)



Risanje višine na dano stranico. Želimo narisati višino na stranico BC trikotnika ABC. V tem primeru narišemo krožnico s središčem v B in polmerom $|AB|$ ter krožnico s središčem v C in polmerom $|AC|$. Nosilka višine je kar premica, ki poteka skozi presečišči teh dveh krožnic. (Na sliki je drugo presečišče označeno z X.) Čeprav je ta konstrukcija precej enostavna, pa ni nujno najbolj natančna. Težava je v tem, da se v splošnem pomožni krožnici ne sekata niti približno pravokotno. (Npr. če je kot pri A zelo manjhen.) Natančnost konstrukcije izboljšamo tako, da najprej na premici BC izberemo novi točki B' in C', da je kot $B'AC'$ bistveno večji – za zgoraj opisano konstrukcijo je namreč idealno, če je kot $B'AC'$ pravi.

Med uporabniki geotrikotnikov je znana še ena risarska bližnjica: risanje tangente na krožnico skozi dano točko brez uporabe šestila. Kako ta **nenatančna** metoda deluje? Hipotenuzo geotrikotnika postavimo na dano točko, na geotrikotniku narisano pravokotnico pa namerimo skozi središče krožnice. **Tudi tej metodi se moramo pri risanju natančnih skic izogniti.** Zakaj? S teoretičnega stališča je risanje tangente nestabilen problem, kar pomeni, da lahko majhna napaka rezultat drastično spremeni: če tangento malo premaknemo, postane sekanta ali pa dane krožnice sploh ne seka. Če želimo narisati natančno skico, moramo uporabiti čim bolj *stabilno metodo* – torej tak postopek, ki karseda zmanjša odvisnost rezultata od nenatančnega risanja.



Risanje tangente na dano krožnico. Dana je krožnica K s središčem O in točka A izven kroga, ki ga ta krožnica omejuje. Želimo narisati tangento na krožnico $\mathcal{K}$ skozi točko A. Narišemo krožnico s premerom AO. Tu gre še za eno pomožno konstrukcijo. Središče O' te krožnice leži v razpolovišču daljice AO, ki ga določimo s pomočjo simetrale daljice AO. Kjer ta krožnica s premerom AO seka krožnico $\mathcal{K}$, sta dotikališči tangent. (Na sliki sta to točki X in Y.) Opozoriti velja, da je tudi ta metoda nenatančna, če leži točka A blizu krožnice $\mathcal{K}$. Če pa leži točka A na krožnici $\mathcal{K}$, je iskana tangenta ena sama. Metodo risanja v tem primeru popolnoma spremenimo. Narišemo jo tako, da postavimo pravokotnico na premico AO skozi točko A. (Glej risanje simetrale daljice.)

Sklenimo zapis o risarskih prijemih še z dvema nasvetoma. Kako najbolj natančno narišemo središče danemu trikotniku očrtane krožnice? Vemo, da se v njenem središču sekajo simetrale (vseh treh) daljic, zato zadošča narisati le dve. Izberemo tisti dve, ki se sekata čimbolj pravokotno, saj bo na ta način presečišče premic najbolj natančno določeno. V praksi to pomeni, da za trikotnik z notranjimi koti α_1, α_2 in α_3 izberemo tisti dve, ki oklepata kot α_i, pri katerem je vrednost izraza $|\alpha_i - \frac{\pi}{2}|$ najmanjša. (Npr. pri ostrokotnem trikotniku narišemo presečišče simetral tistih dveh stranic, ki oklepata največji kot.)

Kako najbolj natančno narišemo središče danemu trikotniku včrtane krožnice? Vemo, da se v njenem središču sekajo simetrale (vseh treh) notranjih kotov, zato zadošča narisati le dve. Tudi v tem primeru narišemo tisti dve, ki se sekata čimbolj pravokotno, saj bo na ta način presečišče premic najbolj natančno določeno. V praksi to pomeni, da za trikotnik z notranjimi koti α_1, α_2 in α_3 izberemo simetrali kotov ob tisti stranici, ki leži nasproti najmanjšega kota – torej simetrali največjih dveh kotov.

Povzemimo: Da bi bila narisana slika karseda natančna, moramo pri risanju izbirati čimbolj stabilne konstrukcije:

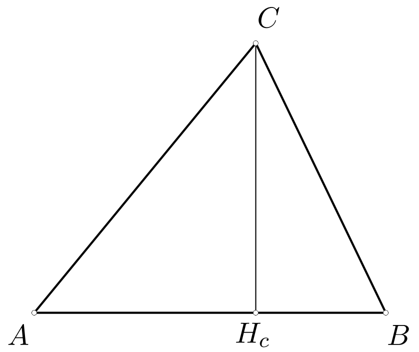
- Točka, ki jo določimo s pomočjo presečišča premic ali krožnic, bo najbolj natančno določena, če se premici ali krožnici sekata pravokotno.
- Če lahko neko točko, premico ali krožnico narišemo na več načinov, izberimo tako pot, da bo relativna napaka čim manjša. (Npr. izbira najbolj oddaljenih dveh točk pri risanju premice skozi več točk, izbira simetral primernih stranic pri risanju središča trikotniku očrtane krožnice, izbira simetral primernih kotov pri risanju središča trikotniku včrtane krožnice.)

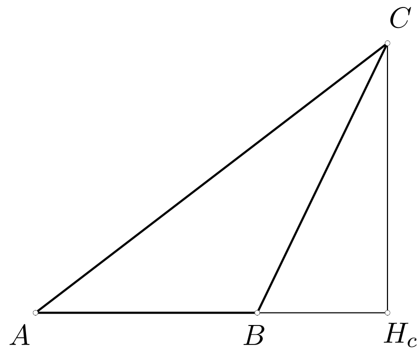
Pri risanju skic tudi ni odveč razmisliti o vrstem redu risanja. Če moramo narisati trikotnik in njemu očrtano krožnico, najprej narišemo krožnico, nato pa še trikotnik, katerega oglišča ležijo na tej krožnici.

Trikotnik in krožnica

Za razumevanje besedila je potrebno osnovno znanje o obodnih in središčnih kotih ter kotih v tetivnem štirikotniku.

Višinska točka trikotnika
Dan je trikotnik ABC. Narišimo premico p_c skozi točko C, ki seka premico AB pravokotno, in označimo presečišče premic p_c in AB s H_c. Daljico CH_c imenujemo *višina na stranico AB trikotnika ABC* in jo označimo s h_c, točko H_c pa imenujemo *nožišče* te višine. Podobno označimo tudi točki H_a in H_b.





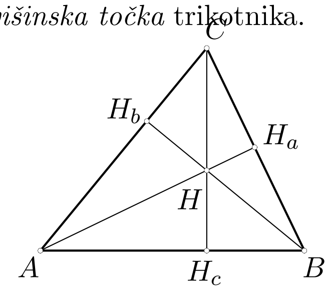
Kot kaže desna skica zgoraj, nožišče višine ne leži vedno na stranici trikotnika. Bralec naj sam nariše še druge primere topokotnih (in pravokotnih) trikotnikov in v vsakem izmed njih analizira lego vseh treh višin.

Narišimo sedaj vse tri višine v trikotniku ABC. Če je trikotnik ostrokoten ali pravokoten, vidimo, da se višine sekajo v eni točki. Če je trikotnik topokoten, se v skladu z gornjo strogo definicijo (višina v trikotniku je daljica) vse tri višine v takem trikotniku sploh ne morejo sekati. Ko namesto višin opazujemo njihove nosilke, opazimo, da se te tri premice sekajo v eni točki. Skratka:

Izrek 1. *Nosilke višin trikotnika se sekajo v eni točki.* ■

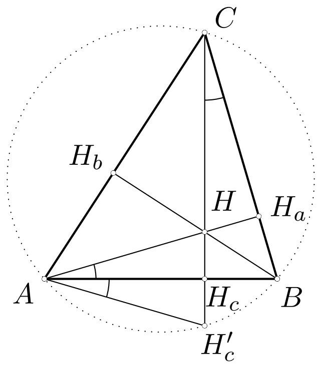
Točko, v kateri se sekajo nosilke višin danega trikotnika, imenujemo *višinska točka* trikotnika.

Narišimo trikotnik ABC in označimo njegovo višinsko točko s H. Neposredno iz konstrukcije vidimo, da je točka A višinska točka trikotnika BCH. Podobno velja tudi za točki B in C. Če torej tvorijo poljubne tri točke iz množice $\{A, B, C, H\}$ trikotnik, je četrta točka njegova višinska točka. Četverki $\{A, B, C, H\}$ pravimo tudi *izmenljiva četverka*.



Izrek 2. *V vsakem trikotniku je nosilka poljubne stranice simetrala daljice med višinsko točko H in od oglišča različnim presečiščem nosilke višine na to stranico z očrtano krožnico.*

Dokaz. Označimo nožišča višin in višinsko točko trikotnika ABC na običajen način. S H_c' označimo od C različno točko, kjer premica CH_c seka trikotniku ABC očrtano krožnico $\mathcal{K}$. Ker je $CH_c \perp AH_c$ in $CH_a \perp AH_a$, je $\sphericalangle H_cCH_a = \sphericalangle H_cAH_a$. (Izrek o kotih s pravokotnimi kraki.) Sedaj pa upoštevamo, da so A, B in H_c kolinearne, A, H in H_a kolinarne, C, B in H_a kolinearne ter C, H, H_c in H_c' kolinarne, in dobimo $\sphericalangle H_c'CB = \sphericalangle H_cCH_a = \sphericalangle H_cAH_a = \sphericalangle H_cAH$. Zaradi koncikličnosti točk A, B, C in H_c' velja



$$\sphericalangle H_c'CB = \sphericalangle H_c'AB. \tag{1}$$

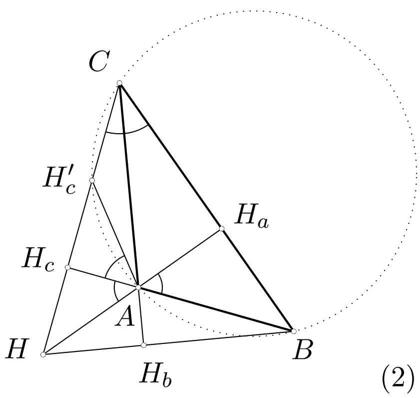
Torej zaradi kolinearnosti točk A, B in H_c velja $\sphericalangle H_c'AB = \sphericalangle H_c'AH_c$. Sledi

$$\sphericalangle H_c'AH_c = \sphericalangle H_cAH$$

in sta pravokotna trikotnika $AH_c'H_c$ in AHH_c skladna. Torej je res $|HH_c| = |H_cH_c'|$. ■

Trditev smo sedaj "dokazali". Delo pa s tem še ni opravljeno. Po vsakem zapisanem dokazu oz. po vsaki zapisani rešitvi naloge se moramo ozreti nazaj. Ali je zapisan dokaz zares brezhiben ali pa smo morda kaj spregledali?

Prva težava se skriva že na začetku. Če je $H_c = H_c'$, je trikotnik ABC pravokoten s pravim kotom pri A ali B in je trditev naloge očitna. (Zapisanega dokaza pa zaradi množice izrojenih trikotnikov ne smemo uporabiti.) Torej smo implicitno privzeli, da je $H_c \neq H_c'$.
V nadaljevanju dokaza smo uporabili dejstvo, da so točke A, B, C in H_c' konciklične in zapisali enakost (1). Na tem mestu smo implicitno privzeli, da ležita točki C in H_c' na različnih bregovih premice AB. Če ti dve točki ležita na istem bregu, moramo takoj zapisati



$$\sphericalangle H_c'CB = \sphericalangle H_c'AH_c, \tag{2}$$

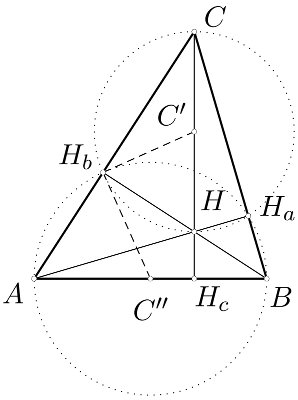
dokaz sam pa lahko potem nadaljujemo kot v prvem primeru.

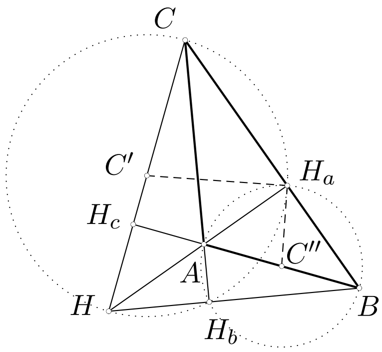
Tako, sedaj pa smo trditev zares dokazali – in je ponovno napočil trenutek, da se obrnemo nazaj. Zaradi težav pri uporabi izreka o obodnih kotih (koncikličnost točk A, B, C in H_c') smo morali ločiti dva bistveno drugačna primera. V prihodnji številki Brihtneža si bomo ogledali, kako bi lahko ta dva primera enovito obravnavali.

Izrek 3. *Naj bo H višinska točka trikotnika ABC, H_a in H_b nožišči višin iz A in B ter O središče trikotniku ABC očrtane krožnice. Potem se krožnici s premeroma AB in CH sekata pravokotno v točkah H_a in H_b, daljici H_aH_b in OC pa sta si pravokotni.*

Opomba. Kot med krožnicama je po definiciji enak kotu med tangentama v presečni točki.

Dokaz. Izkušnja pri prejšnjem dokazu nas uči, da se ne smemo omejiti le na ostrokotni trikotnik.





Vidimo, da sta si skici zelo podobni – in tudi zares gre za enaka dokaza, saj je $\{A, B, C, H\}$ izmenljiva četverka. Torej zadošča dokazati trditev le v primeru, ko je ABC ostrokotni trikotnik. (Na pravokotni trikotnik seveda nismo pozabili, a bo ta enostaven primer obravnaval bralec sam!)

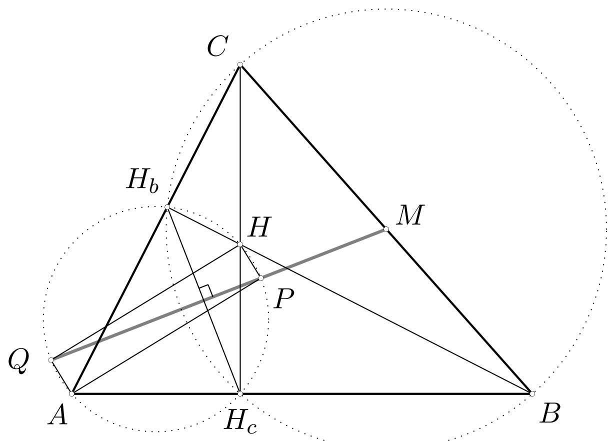
Ker je $\sphericalangle AH_aB = \frac{\pi}{2} = \sphericalangle CH_aH$ in $\sphericalangle AH_bB = \frac{\pi}{2} = \sphericalangle HH_bC$, ležita točki H_a in H_b hkrati na krožnicah s premeroma AB in CH. (Središči teh dveh krožnic označimo z označimo s C' in C''.) Ker je kot med krožnicama enak kotu med tangentama v presečni točki, zadošča pokazati, da je $C'H_b \perp HC''$. Računajmo: $\pi - \sphericalangle C'H_bA - \sphericalangle C''H_bC = \pi - \sphericalangle C'AH_b - \sphericalangle C''CH_b = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$, torej je res $\sphericalangle C'H_bC'' = \frac{\pi}{2}$.

Da sta si trikotnika ABC in AH_bH_c podobna, sledi iz

$$\sphericalangle BAH_b = \sphericalangle H_cHB = \sphericalangle H_bHC = \sphericalangle H_bH_aC.$$

Ker je $\sphericalangle OCA = \frac{\pi}{2} - \sphericalangle ABC$, sledi od tod $H_aH_b \perp OC$.

Zgled 1. *Naj bo H višinska točka trikotnika ABC, v katerem $\sphericalangle BAC \neq \frac{\pi}{2}$. Označimo s P in Q pravokotni projekciji točke H na notranjo in zunanjo simetralo kota BAC. Dokaži, da leži razpolovišče daljice BC na premici PQ.*



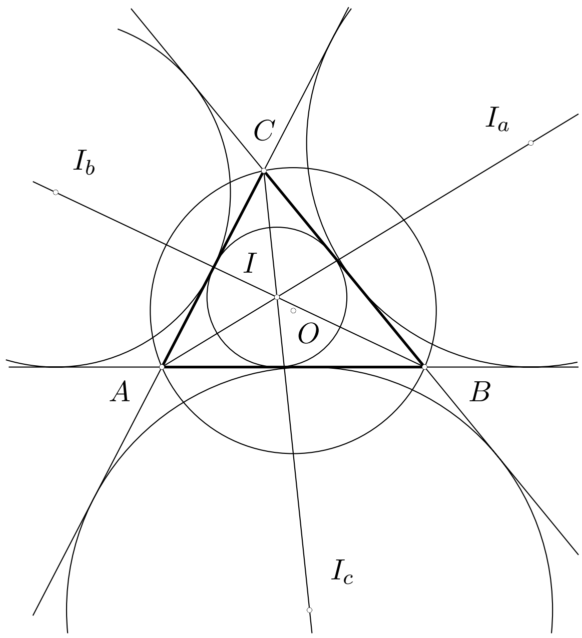
Rešitev. Narišimo natančno skico. Na njej ugledamo mnogo pravih kotov, ki določajo vsaj dve pomembni krožnici. Z ravnilom in šestilom v roki skico premerimo ter opazimo, da simetrala kota pri A v trikotniku H_cAH_b poteka skozi razpolovišče loka $\widehat{H_bH_c}$ nasproti A trikotniku H_cAH_b očrtane krožnice. Tudi simetrala daljice H_cH_b poteka skozi to razpolovišče. Ta simetrala pa sovpada s PQ.
Sedaj pa se lotimo samega dokaza. Vpeljimo najprej oznake. Označimo nožišči višin iz B in C s H_b in H_c. Ker je $\sphericalangle HPA = \sphericalangle HH_cA = \sphericalangle HQA = \sphericalangle HH_bA = \frac{\pi}{2}$, je AH_cPHH_bQ tetivni šestkotnik. Središče njemu očrtane krožnice leži v razpolovišču diagonal pravokotnika $APHQ$. Ker leži točka P na simetrali kota H_cAH_b, je tudi $\sphericalangle HQP = \sphericalangle PQH_b$. Torej je H_cQH_b enakokrak trikotnik z vrhom Q, kar posebej pomeni, da QP pravokotno razpolavlja H_cH_b. Štirikotnik BH_cH_bC je tetiven in središče njemu očrtane krožnice leži v razpolovišču M daljice BC. Ker pa je PQ simetrala njegove tetive H_cH_b, leži točka M res na premici PQ.

Očrtana, včrtana in pričrtana krožnica

Trikotniku očrtana krožnica je tista krožnica, na kateri ležijo oglišča trikotnika. V njenem središču se sekajo simetrale stranic trikotnika. (Na sliki je njeno središče označeno z O, simetrale stranic pa niso narisane.)

Trikotniku včrtana krožnica je tista krožnica, ki se dotika stranic trikotnika. V njenem središču se sekajo simetrale notranjih kotov trikotnika. (Na sliki je njeno središče označeno z I.)

Trikotniku pričrtana krožnica nad izbrano stranico je tista krožnica, ki se od zunaj dotika te stranice trikotnika in nosilk drugih dveh stranic. V njenem središču se sekajo simetrale zunanjih kotov v krajiščih izbrane stranice in simetrala tej stranici nasprotnega kota. (Vsak trikotnik premore 3 pričrtane krožnice. Na sliki so njihova središča označena z I_a, I_b in I_c.)



Izrek 4. *Kotne simetrale in simetrale stranic potekajo skozi razpolovišča lokov očrtane krožnice nad stranicami.*

Na krožnici s premerom II_c ležita točki A in B, njeno središče C' pa leži na razpolovišču tistega loka $\widehat{AB}$ očrtane krožnice trikotnika ABC, ki ne vsebuje točke C.

Dokaz. Ker je CC' simetrala kota ACB, je

$$\sphericalangle ABC' = \sphericalangle BAC'$$

in zato $|AC'| = |C'B|$. Simetrala stranice AB očitno poteka skozi točki C' in C''.

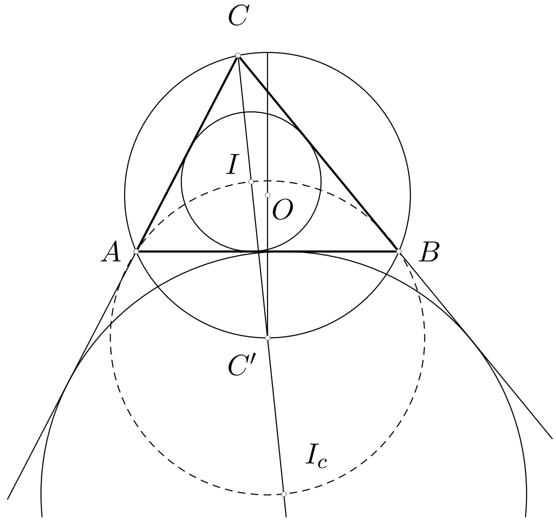
Označimo kote trikotnika z α, β in γ na običajni način. Potem je

$$\sphericalangle C'AI = \frac{\alpha+\gamma}{2}.$$

Ker je $\sphericalangle AC'I = \beta$, sledi od tod

$$\sphericalangle C'IA = \frac{\alpha+\gamma}{2}$$

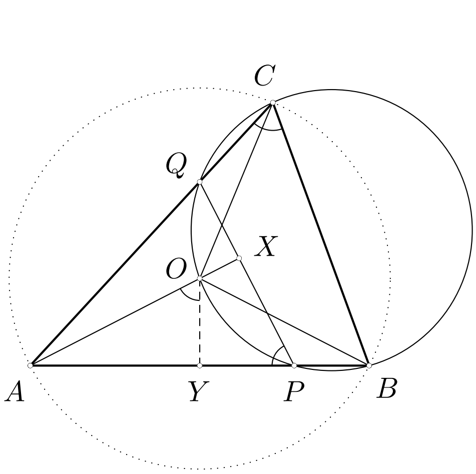
in nadalje $|C'A| = |C'I|$. Ker je $\sphericalangle IAI_c = \frac{\pi}{2}$, je zato tudi $|C'I_c| = |C'I|$.

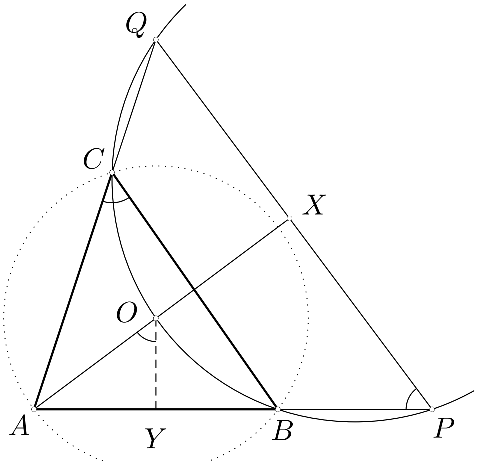


Zgled 2. *Naj bo ABC ostrokotni trikotnik in O središče njemu očrtane krožnice. Označimo krožnico skozi B, C in O s $\mathcal{K}$. Premici AB in AC sekata krožnico $\mathcal{K}$ ponovno v P in Q. Dokaži, da je $AO \perp PQ$.*

Kaj se zgodi v primeru, če je kot BAC topi? Zapiši ustrezno trditev in jo dokaži.

Rešitev. Narišimo skico in označimo presečišče premic AO in PQ z X.



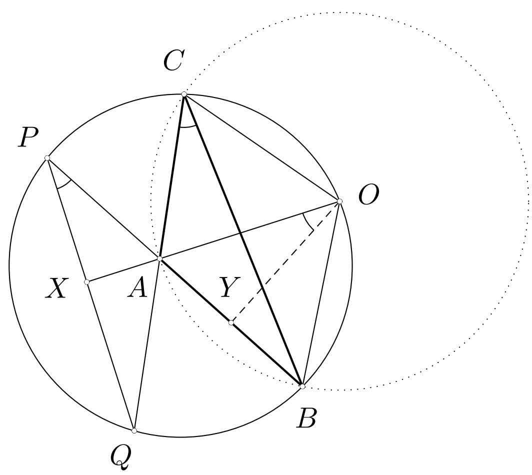


Zapišimo najprej dokaz v primeru, ko je trikotnik ABC ostrokotni. Označimo pravokotno projekcijo točke O na premico AB z Y. Ker leži točka C na očrtani krožnici trikotnika ABC, velja $\sphericalangle AOY = \sphericalangle ACB = \sphericalangle QCB$. Zaradi koncikličnosti točk $PBCQ$ pa velja $\sphericalangle QCB = \sphericalangle QPA$. Sledi $\sphericalangle XPA = \sphericalangle AOY$ in imata trikotnika AOY ter APX enake kote. Zato je res $AX \perp PX$.

Oglejmo si sedaj ta dokaz podrobneje. Ali smo kakšno podrobnost spregledali? Točka P (in podobno Q) je definirana kot drugo presečišče premice AB s krožnico $\mathcal{K}$. Torej je implicitna predpostavka naloge, da drugo presečišče obstaja, kar posebej pomeni, da AB (in tudi AC) ni tangenta na krožnico $\mathcal{K}$. Torej $\sphericalangle BAC \neq \frac{\pi}{3}$. (Prepričaj se sam, da je krožnica skozi O, B in C tangenta na AB in AC hkrati natanko tedaj, ko je $\sphericalangle BAC \neq \frac{\pi}{3}$.)

V sami nalogi pa nismo zahtevali, da leži točka P na daljici AB ampak zgolj na premici AC, zato si moramo pri dokazu ogledati dva primera: $0 < \sphericalangle BAC < \frac{\pi}{3}$ in $\frac{\pi}{3} < \sphericalangle BAC < \frac{\pi}{2}$. Na našo srečo pa lahko za oba primera uporabimo enak dokaz.

Primer, ko je kot pri A topi, pa je nekoliko drugačen. Podobno kot prej označimo pravokotno projekcijo točke O na premico AB z Y. Ker leži točka C na očrtani krožnici trikotnika ABC, velja $\sphericalangle AOY = \sphericalangle ACB = \sphericalangle QCB$. Zaradi koncikličnosti točk $PBCQ$ pa velja $\sphericalangle APX = \sphericalangle ACB$. Torej imata trikotnika AOY in APX enake kote, kar nam da $AX \perp PX$.

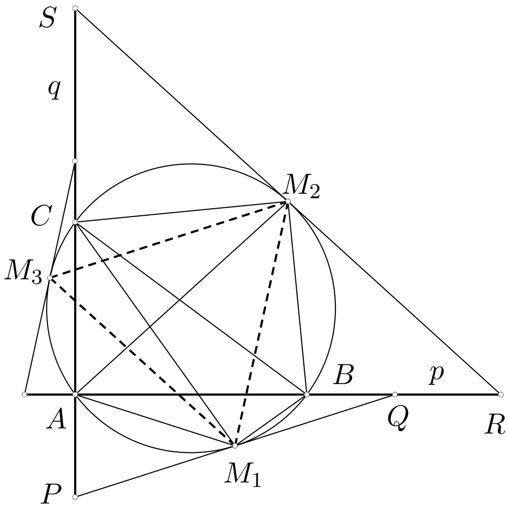


Razmislimo sedaj, zakaj je dokaz v tem primeru drugačen. Točke B, C, P in Q ležijo v obeh primerih na krožnici, torej tvorijo oglišča tetivnega štirikotnika. Da bi lahko zapisali izrek o kotih v tetivnem štirikotniku, pa moramo natančno vedeti, v kakšnem vrstnem redu si sledijo: enkrat imamo vrstni red B, C, P in Q, drugič pa B, C, Q in P. Torej moramo biti pri pisanju kotov nadvse pazljivi. ∎

Po Talesovem izreku vemo, da so vsi obodni koti nad premerom krožnice pravi. Torej leži središče pravokotnemu trikotniku očrtane krožnice v razpolovišču hipotenuze.

Zgled 3. *Pravokotno se sekajoči premici p in q se sekata na krožnici $\mathcal{K}$ in jo razdelita na tri loke. Na vsakem izmed teh lokov izberemo tako točko M_i, $i = 1, 2, 3$, da tangenta na krožnico $\mathcal{K}$ v točki M_i seka premici p in q v dveh točkah, ki sta od točke M_i enako oddaljeni. Dokaži, da je $M_1M_2M_3$ enakostranični trikotnik.*

Rešitev. Privzemimo oznake s skice. Ker je kot med tetivo in tangento enak obodnemu kotu nad to tetivo, je $\sphericalangle QM_1B = \sphericalangle M_1CB = \sphericalangle M_1AB$ in podobno tudi $\sphericalangle PM_1A = \sphericalangle ACM_1$. Ker je točka M_1 središče trikotniku PQA očrtane krožnice, je $\sphericalangle PM_1A = 2\sphericalangle M_1AB$. Torej je



$$\sphericalangle M_1CB = \tfrac{1}{2}\sphericalangle AM_1B = \tfrac{1}{3}\sphericalangle ACB.$$

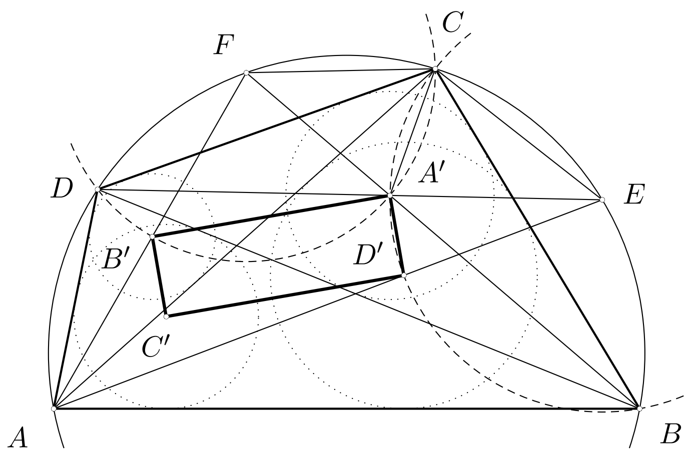
Uporabimo izrek o kotu med tetivo in tangento še dvakrat. Tako je $\sphericalangle BM_2R = \sphericalangle BAM_2 = \sphericalangle BCM_2$ in $\sphericalangle AM_2S = \sphericalangle M_2BA = \sphericalangle M_2CS$. Točka M_2 je središče trikotniku ARS očrtane krožnice, zato je $\sphericalangle AM_2S = 2\sphericalangle BAM_2$. Torej je

$$\sphericalangle BCM_2 = \tfrac{1}{3}BCS$$

in $\sphericalangle M_1M_3M_2 = \sphericalangle M_1CM_2 = \frac{1}{3}(\sphericalangle ACB + \sphericalangle BCS) = \frac{\pi}{3}$. Zaradi simetrije lahko sklepamo, da je tudi $\sphericalangle M_3M_1M_2 = \frac{\pi}{3}$, zato je $M_1M_2M_3$ res enakostranični trikotnik.

Zgled 4. *Naj bo $ABCD$ tetivni štirikotnik. Dokaži, da so središča trikotnikom ABC, ABD, ACD in BCD včrtanih krožnic oglišča nekega pravokotnika.*

Rešitev. Točke B, D', A' in C ležijo na krožnici s središčem v razpolovišču E loka $\widehat{BC}$. Podobno tudi točke D, B', A' in C ležijo na krožnici s središčem v razpolovišču loka $\widehat{CD}$.



Torej sta $FB'A'$ in $EA'D'$ enakokraka trikotnika. Sledi $\sphericalangle FA'B' = \frac{\pi}{2} - \frac{\sphericalangle B'FA'}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\sphericalangle ACB}{2}$ in podobno $\sphericalangle D'A'E = \frac{\pi}{2} - \frac{\sphericalangle DCA}{2}$. Ker sta tudi $FA'C$ in FCA' enakokraka trikotnika, lahko podobno zapišemo še $\sphericalangle CA'F = \frac{\pi}{2} - \frac{\sphericalangle BDC}{2}$ in $\sphericalangle EA'C = \frac{\pi}{2} - \frac{\sphericalangle CBD}{2}$. Torej je res $\sphericalangle B'A'C' = 2\pi - \sphericalangle FA'B' - \sphericalangle D'A'E - \sphericalangle CA'F - \sphericalangle EA'C = \frac{1}{2}(\sphericalangle ACB + \sphericalangle DCA + \sphericalangle BDC + \sphericalangle CBD) = \frac{\pi}{2}$.

Naloge

Pri reševanju vsake naloge nariši dovolj veliko in natančno skico. Označi vse točke in poskusi najti kakšno skrito premico (tj. ali morda katere tri točke ne ležijo na isti premici) ali krožnico (tj. ali morda katere štiri točke ne ležijo na isti krožnici).

Ne pozabi, da je nosilka vsake daljice premica, s pomočjo katere lahko tvorimo nova presečišča z že obstoječimi premicami ali krožnicami.

1. Naj bo $ABCD$ tetivni štirikotnik in $\mathcal{S}$ množica središč vseh včrtanih in pričrtanih krožnic trikotnikov ABC, ABD, ACD in BCD. Množica $\mathcal{S}$ ima 16 točk. Dokaži, da obstajata taki množici $\mathcal{P}$ in $\mathcal{Q}$, ki vsaka vsebuje po štiri paroma vzporedne premice in vsaka premica iz $\mathcal{P} \cup \mathcal{Q}$ vsebuje po štiri točke množice $\mathcal{S}$. (Točka seveda lahko leži na več premicah hkrati.)

2. Naj bo ABC ostrokotni trikotnik. Simetrali (notranjih) kotov $\sphericalangle ABC$ in $\sphericalangle BCA$ sekata nasprotni stranici v točkah L in M. Dokaži, da je $\sphericalangle CAB = \frac{\pi}{3}$ natanko tedaj, ko obstaja taka točka K v notranjosti stranice BC, da je trikotnik KLM enakostraničen.

3. Krožnici $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$ se sekata v točkah A in B. Premica l, ki poteka skozi A, seka krožnici $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$ še v točkah C in D. Naj bosta M in N razpolovišči tistih lokov $\widehat{BC}$ in $\widehat{BD}$ krožnic $\mathcal{K}_1$ in $\mathcal{K}_2$, ki ne vsebujeta točke A. Dokaži, da je $\sphericalangle MKN = \frac{\pi}{2}$, kjer smo s K označili razpolovišče daljice CD.

4. Naj bo H višinska točka ne-enakostraničnega ostrokotnega trikotnika ABC, O pa središče njemu očrtane krožnice. Premici AH in AO naj sekata očrtano krožnico še v točkah M in N. Označimo s P, Q in R zaporedoma presečišča premic BC s HN, BC z OM in HQ z OP. Dokaži, da je $AORH$ paralelogram.

Mednarodna matematična olimpiada 2002

Na *43. mednarodni matematični olimpiadi*, ki je bila od 18. do 30. julija v Glasgowu (Velika Britanija), so Slovenijo zastopali Aleksandra Franc s I. gimnazije v Celju, Tone Gradišek in Klemen Šivic z Gimnazije Bežigrad, Tine Porenta z Gimnazije Škofja Loka, Janez Šter z Gimnazije Želimlje in Erik Štrumbelj z Gimnazije Kočevje.

Klemen Šivic je osvojil bronasto medaljo, Erik Štrumbelj pa pohvalo.

Naloge

1. Naj bo n naravno število. Naj bo T množica vseh tistih točk (x, y) v ravnini, za katere sta x in y nenegativni celi števili in je $x + y < n$. Vsaka točka iz množice T je pobarvana rdeče ali modro. Če je točka (x, y) rdeča, potem so rdeče tudi vse tiste točke (x', y') iz množice T, za katere velja $x' \leq x$ in $y' \leq y$. Množico n modrih točk z različnimi koordinatami x imenujemo X-množica, množico n modrih točk z različnimi koordinatami y pa Y-množica. Dokaži, da je število X-množic enako številu Y-množic.

2. Naj bo BC premer krožnice Γ s središčem O. Naj bo A taka točka na krožnici Γ, da je $0° < \sphericalangle AOB < 120°$. Naj bo D razpolovišče loka AB, ki ne vsebuje točke C. Premica, ki gre skozi središče O in je vzporedna premici DA, seka premico AC v točki J. Simetrala daljice OA seka krožnico Γ v točkah E in F. Dokaži, da je J središče trikotniku CEF včrtane krožnice.

3. Poišči vse pare (m, n) naravnih števil $m, n \geq 3$, za katere obstaja neskončno takih naravnih števil a, da je
$$\frac{a^m + a - 1}{a^n + a^2 - 1}$$
celo število.

4. Naj bo $n > 1$ naravno število. Vsi pozitivni delitelji števila n so $d_1, d_2, \ldots, d_k$, pri čemer je
$$1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n.$$
Označimo $D = d_1d_2 + d_2d_3 + \cdots + d_{k-1}d_k$.
   (a) Dokaži, da je $D < n^2$.
   (b) Poišči vsa števila n, za katera je D delitelj števila n^2.

5. Poišči vse funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, za katere velja
$$(f(x) + f(z))\,(f(y) + f(t)) = f(xy - zt) + f(xt + yz)$$
za vsa realna števila x, y, z in t.

6. Naj bodo $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$ enotske krožnice v ravnini, pri čemer je $n \geq 3$. Označimo njihova središča z O_1, O_2, ..., O_n. Denimo, da nobena premica nima skupnih točk z več kot dvema od teh krožnic. Dokaži, da je potem

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{|O_i O_j|} \leq \frac{(n-1)\pi}{4}.$$

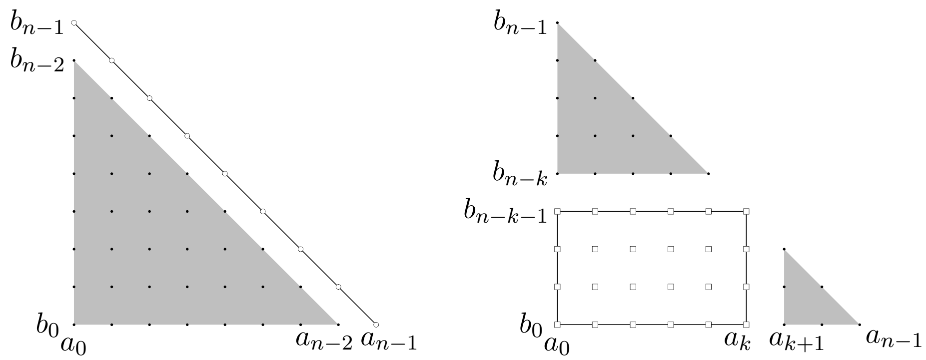
Rešitve nalog

1. Za vsak $i = 0, 1, \ldots, n-1$ označimo z a_i število modrih točk v $T = T(n)$, katerih abscisa je enaka i in z b_i število modrih točk v T, katerih ordinata je enaka i. Število X-množic je očitno enako $a_0 a_1 \ldots a_{n-1}$, število Y-množic pa $b_0 b_1 \ldots b_{n-1}$. Dokazali bomo, da je $(b_0, b_1, \ldots, b_{n-1})$ permutacija števil $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$, od koder potem sledi, da sta gornja dva produkta res enaka.

   Trditev bomo dokazali z indukcijo. Za $n = 1$ ni kaj dokazovati. Imamo le eno točko v $T(1)$ in ta je bodisi modra (tedaj je $a_0 = b_0 = 1$) bodisi rdeča (tedaj je $a_0 = b_0 = 0$).

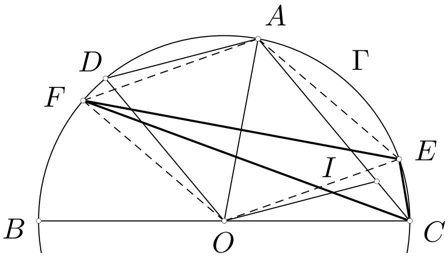
   V dokazu indukcijskega koraka pa privzemimo, da trditev velja za vse $k < n$ in dokažimo trditev za $T(n)$.

   Oglejmo si točke na premici $x + y = n - 1$. Če so vse točke na tej premici modre, jo lahko odrežemo in dobimo dopustno konfiguracijo za $T(n-1)$. Števila modrih točk po stolpcih v $T(n-1)$ so po vrsti enaka $a_0 - 1, \ldots, a_{n-2} - 1$, števila rdečih točk po vrsticah pa $b_0 - 1, \ldots, b_{n-2} - 1$. Po indukcijski predpostavki je $(b_0 - 1, \ldots, b_{n-2} - 1)$ permutacija od $(a_0 - 1, \ldots, a_{n-2} - 1)$. Zaradi $a_{n-1} = b_{n-1} = 1$ tako trditev v tem primeru sledi.



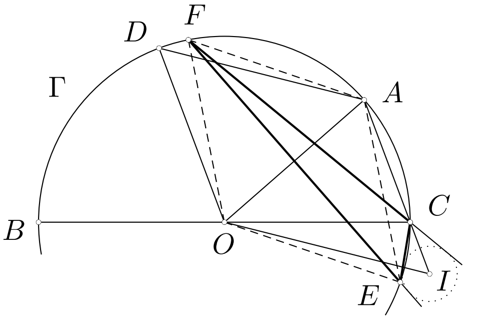
   V drugem primeru pa imamo na premici $x + y = n - 1$ vsaj eno rdečko točko; recimo točko $(k, n-1-k)$. Ko iz $T(n)$ izrežemo pravokotnik $\{(x, y);\ x \leq k, y \leq n - 1 - k\}$, dobimo dva trikotnika $T(k)$ in $T(n-k-1)$, za katera trditev po indukcijski predpostavki velja. (V primeru $k = 0$ ali $k = n - 1$ dobimo le en trikotnik.) Torej je $(a_0, \ldots, a_{k-1})$ permutacija od $(b_{n-k}, \ldots, b_{n-1})$, $(a_{k+1}, \ldots, a_{n-1})$ permutacija od $(b_0, \ldots, b_{n-k-2})$. Trditev je tudi v tem primeru dokazana, saj je $a_k = b_{n-1-k} = 0$.

2. Ker je $\sphericalangle AOB < 120°$, ležijo točke E, F in A na istem bregu premice BC. Ker je točka A razpolovišče loka $\widehat{EF}$, je CA simetrala kota ECF. Trikotnik OCA je enakokrak z vrhom pri O in $\sphericalangle OCA = \frac{1}{2}\sphericalangle BOA$. Torej je $AC \parallel OD$. Po konstrukciji je $OI \parallel DA$ in je zato $OIAD$ paralelogram. Sledi $|OD| = |IA|$.



Ker se daljici OA in EF medsebojno pravokotno razpolavljata, je $OEAF$ romb in zato $|AI| = |OD| = |OE| = |AF|$. Trikotnik FIA je torej enakokrak z vrhom pri A. Sledi $\sphericalangle IFE = \sphericalangle IFA - \sphericalangle EFA = \sphericalangle AIF - \sphericalangle ECA = \sphericalangle AIF - \sphericalangle ICF = \sphericalangle IFC$. Torej je IF simetrala kota CFE in je res I središče trikotniku ECF včrtane krožnice.

Opomba. V primeru, da je $120° < \sphericalangle AOB < 180°$, je točka I središče trikotniku ECF pričrtane krožnice nad stranico EC. Tedaj je namreč CA simetrala zunanjega kota pri C trikotnika ECF. (Podrobno rešitev naloge naj v tem primeru zapiše bralec sam.)



3. Če števili m in n zadoščata pogoju naloge, je $n < m$.

Dokažimo najprej, da je polinom $f(x) = x^m + x - 1$ celoštevilsko deljiv s polinomom $g(x) = x^n + x^2 - 1$. Ker je vodilni koeficient polinoma g enak 1, obstajata polinoma $r, q \in \mathbb{Z}[x]$, da je $f(x) = q(x)g(x) + r(x)$, kjer je $\deg r < \deg g$. Sledi $\frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)}$. Ker je $\deg r < \deg g$, je $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{r(x)}{g(x)} = 0$. Po drugi strani pa je izraz $q(x) + \frac{r(x)}{g(x)}$ celo število za neskončno mnogo celih števil a. Torej je $\frac{r(a)}{g(a)} = 0$ za neskončno mnogo celih števil a oz. $r \equiv 0$. Posebej to pomeni, da je $\frac{f(a)}{g(a)}$ celo število za vsak $a \in \mathbb{Z}$.

Polinoma f in g imata natanko eno ničlo na intervalu $[0, 1]$, saj sta na tem intervalu monotoni funkciji in je $f(0) = g(0) = -1$ ter $f(1) = g(1) = 1$. Ta ničla je skupna (označimo jo z α), saj g deli f. Očitno je $\alpha > \phi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, kjer je ϕ pozitivna ničla polinoma $h(x) = x^2 + x - 1$. Res: $f(\phi) < h(\phi)$, zato funkcija f na intervalu $[-1, \phi]$ nima ničle.

Dokažimo sedaj, da je $m < 2n$. Če je $m \geq 2n$, velja $1 - \alpha = \alpha^m \leq (\alpha^n)^2 = (1 - \alpha^2)^2$ oz. $1 - \alpha \leq (1 - \alpha^2)^2$, kar lahko preoblikujemo v $\alpha(\alpha - 1)(\alpha^2 + \alpha - 1) \geq 0$. Torej bi morali imeti $\alpha \leq \phi$, kar pa po že dokazanem ne drži. Torej je res $m < 2n$.

Nazadnje pokažimo, da je pri pogoju $m < 2n$ par $(m, n) = (5, 3)$ edina rešitev. Naj bo torej (m, n) rešitev. Kot smo že dokazali, mora biti $\frac{f(a)}{g(a)} \in \mathbb{Z}$ za vsak $a \in \mathbb{Z}$. Izberimo $a = 2$ in označimo $d = g(2) = 2^n + 3$. Tedaj je $f(2) \equiv 0 \pmod{d}$ oz. $-2^m \equiv 1 \pmod{d}$. Naj bo $m = n + k$, kjer je $1 \leq k < n$. Tedaj je

$$-2^m \equiv (d - 2^n)2^k \equiv 3 \cdot 2^k \pmod{d}.$$

Za $1 \leq k \leq n - 2$ je seveda $1 < 3 \cdot 2^k < 4 \cdot 2^k \leq 2^n < d$, zato je $3 \cdot 2^k \not\equiv 1 \pmod{d}$. Pri $k = n - 1$ (in $m = 2n - 1$) pa je najmanjši pozitiven ostanek števila -2^m pri deljenju z d enak $3 \cdot 2^{n-1} - d = 2^{n-1} - 3$, kar je enako 1 le za $n = 3$ (in $m = 5$). Ker velja $a^5 + a - 1 = (a^3 + a^2 - 1)(a^2 - a + 1)$, je $(m, n) = (5, 3)$ res rešitev.

4. Če je število d delitelj števila n, je tudi $\frac{n}{d}$ njegov delitelj. Torej je

$$D = \sum_{1\leq i<k} d_i d_{i+1} = n^2 \sum_{1\leq i<k} \frac{1}{d_i d_{i+1}} \leq n^2 \sum_{1\leq i<k} \left(\frac{1}{d_i} - \frac{1}{d_{i+1}}\right) < \frac{n^2}{d_1} = n^2,$$

saj je $d_{i+1} \geq d_i + 1$.

Naj bo p najmanjši praštevilski delitelj števila n (in seveda tudi n^2). Tedaj je $d_2 = p$ in $d_{k-1} = \frac{n}{p}$. Če je $n = p$, je $k = 2$ in $D = p$. Torej res $D \mid n^2$. Če pa je n sestavljeno število, je $k > 2$ in $D > d_{k-1}d_k = \frac{n^2}{p}$. Če bi bil D v tem primeru delitelj števila n^2, bi bil tudi $\frac{n^2}{D}$ njegov delitelj. Vendar pa je $1 < \frac{n^2}{D} < p$, kar pomeni, da p ni najmanjši praštevilski delitelj števila n^2. Torej smo dokazali, da $D \mid n^2$ natanko tedaj, ko je n praštevilo.

5. V funkcijsko enačbo vstavimo $x = y = z = 0$ in dobimo $2f(0)(f(0) + f(t)) = 2f(0)$. Za $t = 0$ nadalje sledi $4f^2(0) = 2f(0)$, kar nam da $f(0) = 0$ ali $f(0) = \frac{1}{2}$. Če je $f(0) = \frac{1}{2}$, sledi $f(t) = \frac{1}{2}$ za vsak $t \in \mathbb{R}$.

   Naj bo torej $f(0) = 0$. Če v funkcijsko enačbo vstavimo $z = t = 0$, dobimo $f(x)f(y) = f(xy)$. Torej je f multiplikativna funkcija. Za $x = y = 1$ dobimo $f(1)^2 = f(1)$, kar nam da $f(1) = 0$ ali $f(1) = 1$. Če je $f(1) = 0$, iz pogoja multiplikativnosti sledi $f(x) = f(1 \cdot x) = f(1)f(x) = 0$ za vsak x.

   Naj bo torej $f(0) = 0$ in $f(1) = 1$. Pri $x = 0$ in $y = t = 1$ iz funkcijske enačbe sledi $2f(z) = f(-z) + f(z)$ oz. $f(-z) = f(z)$. Torej je f soda funkcija. Iz multiplikativnosti sledi $f(x^2) = f(x)^2 \geq 0$, zato je $f(y) \geq 0$ za vsak $y \in \mathbb{R}$.

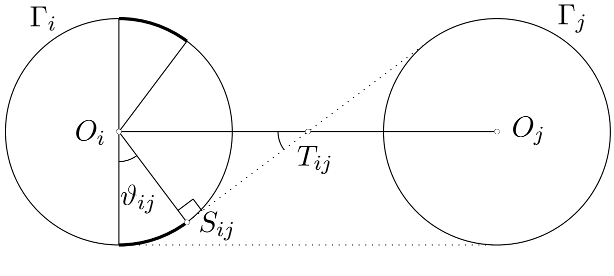
   Vstavimo $x = t$ in $y = z$ v funkcijsko enačbo in dobimo $(f(x) + f(y))^2 = f(x^2 + y^2)$. Ker je $f(y) \geq 0$, sledi $f(x^2 + y^2) \geq f(x)^2 = f(x^2)$. Torej je f monotona funkcija na intervalu $[0, \infty)$.

   Vstavimo $y = z = t = 1$ v funkcijsko enačbo in dobimo
$$f(x-1) + f(x+1) = 2(f(x) + 1).$$
   Ko po vrsti izračunamo $f(2) = 2(f(1) + 1) - f(0) = 4$, $f(3) = 2(f(2) + 1) - f(1) = 9$, $f(4) = 16, \ldots$, domnevamo, da funkcija f, $f(n) = n^2$ za vsak $n \in \mathbb{N}_0$, ustreza gornji funkcijski enačbi. Domnevo potrdimo z indukcijo:
$$f(n+1) = 2(f(n) + 1) - f(n-1) = 2(n^2 + 1) - (n-1)^2 = (n+1)^2.$$
   Ker je f soda, tako velja $f(n) = n^2$ za vsak $n \in \mathbb{Z}$, zaradi multiplikativnosti pa sledi $f(a) = a^2$ za vsak $a \in \mathbb{Q}$.

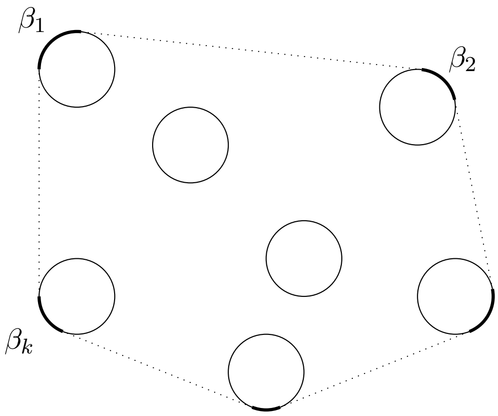
   Nazadnje upoštevamo, da je funkcija f na intervalu $[0, \infty)$ monotona. Vzemimo poljuben $x \in [0, \infty)$. Če je $f(x) < x^2$, obstaja racionalno število a, da je $\sqrt{f(x)} < a < x$. Iz prve neenakosti sledi $f(x) < a^2$, iz druge pa zaradi monotonosti $a^2 = f(a) < f(x)$. Podobno ovržemo tudi možnost $f(x) > x^2$. Torej je res $f(x) = x^2$ za vsak $x \in [0, \infty)$. Ker pa smo že dokazali, da je f soda funkcija, je $f(x) = x^2$ za vsak $x \in \mathbb{R}$.

   Nalogo torej rešijo funkcije $f(x) = 0$, $f(x) = \frac{1}{2}$ in $f(x) = x^2$.

6. Očitno so krožnice disjunktne. Oglejmo si krožnici Γ_i in Γ_j za $i \neq j$. Množico tistih točk na krožnici Γ_i, iz katerih tangenta na Γ_i seka krožnico Γ_j, sestavljata dva loka z dolžino ϑ_{ij}, kjer je ϑ_{ij} ustrezni središčni kot. Trikotnik $O_iS_{ij}T_{ij}$ je pravokoten s kotom ϑ_{ij} pri oglišču T_{ij}. Torej je $|O_iT_{ij}| \sin \vartheta_{ij} = 1$, od koder sledi $\sin \vartheta_{ij} = \frac{1}{|O_iT_{ij}|} = \frac{2}{|O_iO_j|}$. Ker poljubna tangenta na Γ_i seka največ eno drugo krožnico, leži na krožnici Γ_i nekaj (disjunktnih) lokov s skupno dolžino $\alpha_i = \sum_{j \neq i} 2\vartheta_{ij}$, iz katerih tangente sekajo kakšno drugo krožnico.



Označimo z β_i dolžino tistega loka krožnice Γ_i, ki leži na robu konveksne ogrinjače vseh krožnic. (Po potrebi postavimo $\beta_i = 0$). Tedaj velja $\alpha_i + \beta_i \leq 2\pi$ in $\sum_i \beta_i = 2\pi$. Sledi $\sum_i(\alpha_i + \beta_i) \leq 2n\pi$ in od tod $\sum_i \alpha_i \leq 2(n-1)\pi$. Ker za vsako pozitivno realno število x velja $\sin x \leq x$, lahko ocenimo



$$\begin{aligned}2(n-1)\pi &\geq \sum_i \alpha_i \geq \sum_i \sum_{j\neq i} 2\vartheta_{ij} = 4\sum_{i\neq j} \vartheta_{ij} \geq \\ &\geq 4\sum_{i\neq j} \sin\vartheta_{ij} = 8\sum_{i\neq j} \frac{1}{|O_iO_j|},\end{aligned}$$

od koder sledi iskana neenakost.

http://www.dmfa.si/Brihtnez/BrihtnezIndex.html

Brihtnež, Letnik 0, številka 1
Oktober 2002