

1. Določi vsa naravna števila k , m in n , za katera velja

$$k! + m! = k! \cdot n!.$$

2. Naj bo $n \geq 2$ naravno število. Tabelo velikosti $n \times n$ pobarvamo z nekaj barvami tako, da je vsaka celica pobarvana z natanko eno barvo. Izkaže se, da sta za vsako celico natanko dve izmed njenih sosednjih celic pobarvani z enako barvo kot tista celica. Določi vse možne vrednosti števila n .

Opomba: Celici sta sosednji, če imata skupno stranico.

3. Naj bo I središče včrtane krožnice trikotnika ABC . Točki P in Q ležita na stranicah AB in AC zaporedoma, pri čemer velja $|AP| = |AQ|$ in točka I leži na daljici PQ . Naj bo M drugo presečišče očrtanih krožnic trikotnikov BPI in CQI . Naj se premici PM in BI sekata v točki D , premici QM in CI pa v točki E . Dokaži, da premica MI razpolavlja daljico DE .

5. Določi vse take funkcije $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, da za vse $x, y \in \mathbb{R}^+$ velja

$$f(x + y + f(y)) = f(x) + 2y.$$

Naloge rešuj samostojno. Za reševanje imaš na voljo 4 ure 30 minut.

Uporaba zapiskov, literature ali žepnega računalnika ni dovoljena.

Naloge so tajne do objave na spletni strani priprav.

Rešitve

1. Najprej opazimo, da velja $m! = k! \cdot (n! - 1)$, zato $k! \mid m!$. Ker sta k in m naravni števili, sledi, da je $m \geq k$. Če začetno enačbo sedaj delimo s $k!$, dobimo

$$1 + \frac{m!}{k!} = n!.$$

Za $n = 1$ enačba nima rešitve, zato lahko predpostavimo $n \geq 2$. V tem primeru je desna stran enačbe sodo število, zato enako velja za levo stran, torej je $\frac{m!}{k!}$ liho število. Ločimo tri primere:

- i) Če je $m = k$, dobimo $2 = n!$, oziroma $n = 2$. To nam da prvo družino rešitev $(k, m, n) = (k, k, 2)$, kjer je k poljubno naravno število.
- ii) Če je $m = k + 1$, dobimo

$$n! = 1 + \frac{(k+1)!}{k!} = k + 2,$$

torej je $k = n! - 2$. Posebej mora veljati $n > 2$, saj je k naravno število. Dobimo še drugo družino rešitev $(k, m, n) = (n! - 2, n! - 1, n)$, kjer je $n \geq 3$ poljubno naravno število.

- iii) Če je $m \geq k + 2$, število

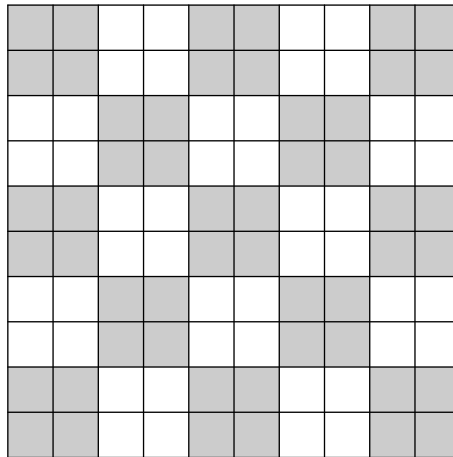
$$\frac{m!}{k!} = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdots (k+1)$$

kot faktorja vsebuje dve zaporedni naravni števili, zato je sodo, kar je protislovje. V tem primeru tako ne dobimo rešitev.

Imamo torej dve družini rešitev – $(k, m, n) = (k, k, 2)$, kjer je k poljubno naravno število, in $(n! - 2, n! - 1, n)$, kjer je $n \geq 3$ poljubno naravno število.

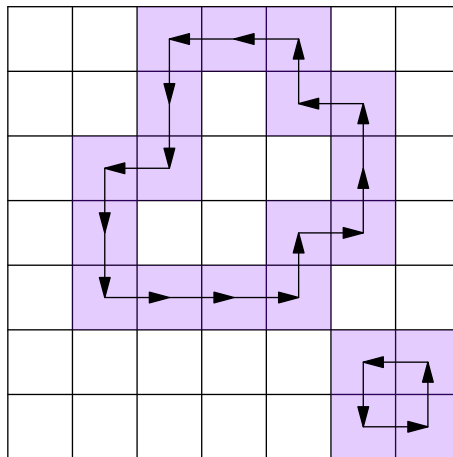
2. Trdimo, da pogoj izpolnjujejo natanko vsa soda naravna števila. Da soda števila res zadoščajo pogoju vidimo tako, da tabelo razdelimo na kvadrate velikosti 2×2 , nato pa dobljeno razdelitev pobarvamo kot šahovnico.

Jasno je, da ima v taki konfiguraciji vsaka celica natanko dve sosednji celici enake barve.



Slika 1: Primer barvanja za $n = 10$

Sedaj moramo dokazati še, da liha števila ne izpolnjujejo pogoja. Oglejmo si torej vse celice neke barve v tabeli.



Slika 2: Celice ene barve tvorijo sklenjene cikle

Izberimo si eno celico. Ker ima dve sosedi enake barve, se lahko premaknemo v eno izmed njih. Ta celica ima prav tako dve sosedi enake barve; prejšnjo celico, in eno novo. Premaknimo se v slednjo. Postopek ponavljamo, dokler se ne vrnemo v celico, ki smo jo že obiskali (to se bo zgodilo, saj je celic končno mnogo). Opazimo, da se bomo s tem vrnili v začetno celico, saj bi sicer imeli celico s tremi sosedami enake barve. Dobili smo torej nek cikel. Enostavno se prepričamo, da je v njem sodo mnogo celic – tolikokrat, kot smo se premaknili navzgor, smo se premaknili tudi navzdol. Enako velja za horizontalne premike. Vseh premikov je torej sodo mnogo, zato je tudi celic v ciklu sodo.

Postopek lahko sedaj ponovimo na poljubni celici, ki ni v tem ciklu – dobimo nov cikel s sodim številom celic. To ponavljamo, dokler ne obrav-

navamo vseh celic. Ker se nobena dva cikla ne sekata, vsak pa je sode dolžine, sledi, da je n^2 sodo število, kar je mogoče le za soda števila n .

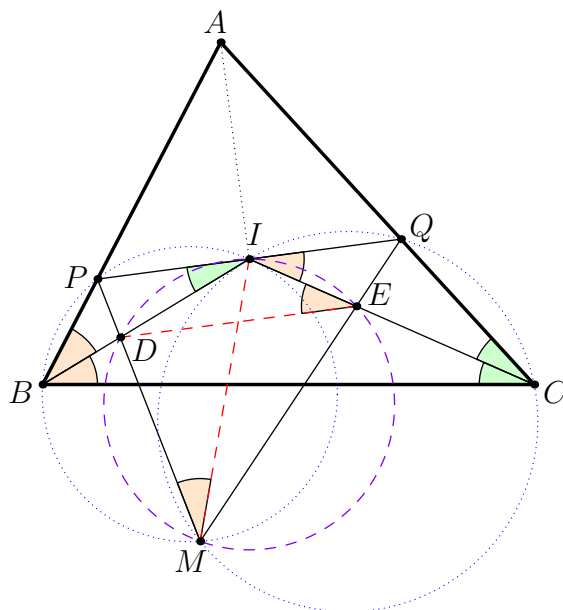
3. **1. način:** Uporabljamo usmerjene kote. Iz enakosti dolžin sledi, da je APQ enakokrak trikotnik. Ker je AI simetrala kota pri vrhu, je $AI \perp PQ$. Tako lahko izrazimo $\angle IPA = 90^\circ - \angle BAI$. V trikotniku BPI lahko tako izračunamo

$$\begin{aligned}\angle PIB &= 180^\circ - \angle BPI - \angle IBP \\ &= \angle IPA - \angle IBP \\ &= 90^\circ - \angle BAI - \angle IBA \\ &= \angle ACI,\end{aligned}$$

saj je $\angle IBA + \angle BAI + \angle ACI = 90^\circ$. Simetrično dobimo $\angle CIQ = \angle IBA$. Z uporabo zgornjih enakosti in podanih koncikličnosti lahko izrazimo

$$\begin{aligned}\angle EMD &= \angle EMI + \angle IMD \\ &= \angle QMI + \angle IMP \\ &= \angle QCI + \angle IBP \\ &= \angle PIB + \angle CIQ \\ &= 180^\circ - \angle DIE \\ &= \angle EID,\end{aligned}$$

od koder sledi, da so točke I , D , E in M konciklične.



Slika 3: Prva rešitev

Velja še

$$\angle IED = \angle IMD = \angle IMP = \angle IBP = \angle CIQ,$$

zato velja $DE \parallel PQ$. Sklepamo, da sta trikotnika MPQ in MDE podobna. Ker premica MI razpolavlja daljico PQ , sledi, da razpolavlja tudi daljico DE .

2. način: Kot v prvi rešitvi pokažemo, da je $\angle PIB = \angle ACI$.

Naj bo X presečišče premic MI in BC . Dokazali bomo, da je $IDXE$ paralelogram. Ker se v paralelogramu diagonali razpolavljata, bo s tem naloga rešena.

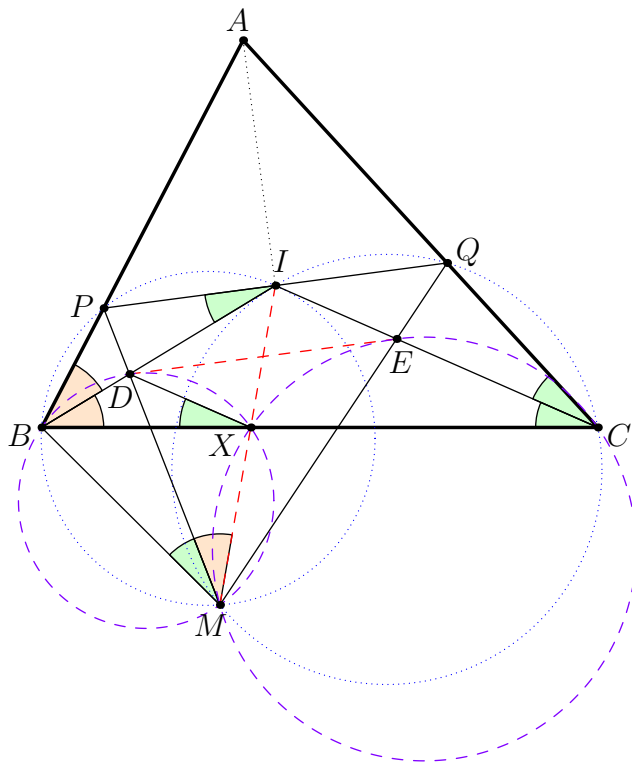
Z uporabo podanih krožnic in simetrle kota lahko izrazimo

$$\angle XMD = \angle IMP = \angle IBP = \angle CBI = \angle XBD,$$

zato so točke B, M, D in X konciklične. Z uporabo te krožnice lahko sedaj izrazimo še

$$\angle DXB = \angle DMB = \angle PMB = \angle PIB = \angle QCI = \angle ICB.$$

Sledi, da je $DX \parallel CI$. Simetrično sledi $EX \parallel BI$, zato je $IDXE$ res paralelogram.



Slika 4: Druga rešitev

5. **1. način:** Najprej pokažimo, da je f injektivna funkcija. Predpostavimo torej, da je $f(a) = f(b)$. Če v enačbo vstavimo $x \rightarrow a, y \rightarrow b$, dobimo

$$f(a + b + f(b)) = f(a) + 2b,$$

če vstavimo $x \rightarrow b, y \rightarrow a$, pa

$$f(b + a + f(a)) = f(b) + 2a.$$

Ker je $f(a) = f(b)$, sta levi strani zgornjih enakosti enaki. Tako dobimo

$$f(a) + 2b = f(b) + 2a,$$

oziroma $a = b$. Funkcija f je torej res injektivna.

Če v enačbo vstavimo $y \rightarrow x$, dobimo

$$f(2x + f(x)) = f(x) + 2x,$$

torej je $2x + f(x)$ fiksna točka f za vsak $x \in \mathbb{R}^+$. Da uporabimo to lastnost, vstavimo še $x \rightarrow 2x + f(x)$ in dobimo

$$f(2x + f(x) + y + f(y)) = f(2x + f(x)) + 2y = 2x + f(x) + 2y.$$

Desno stran te enakosti lahko dobimo na še en način, in sicer tako, da v začetno enačbo vstavimo $y \rightarrow x + y$. Tako sledi

$$f(x + x + y + f(x + y)) = f(x) + 2x + 2y.$$

Skupaj s prejšnjo enakostjo tako dobimo

$$f(x + x + y + f(x + y)) = f(2x + f(x) + y + f(y)).$$

Z upoštevanjem injektivnosti sledi, da je $f(x + y) = f(x) + f(y)$ za vse $x, y \in \mathbb{R}^+$. Gre za Cauchyjevo funkcijsko enačbo, ki ima nad $\mathbb{R}^+$ samo linearne rešitve. Če v enačbo vstavimo predpis $f(x) = cx$, dobimo

$$\begin{aligned} f(x + y + f(y)) &= f(x + y + cy) = cx + cy + c^2y, \\ f(x) + 2y &= cx + 2y, \end{aligned}$$

torej je $c + c^2 = 2$. Edina pozitivna rešitev te kvadratne enačbe je $c = 1$, od koder sledi, da je edina rešitev enačbe

$$\boxed{f(x) = x \text{ za vse } x \in \mathbb{R}^+}.$$

2. način: Naj bodo a , b in c poljubna pozitivna realna števila. Na dva načina izrazimo $f(a + b + c + f(c) + f(b + c + f(c)))$. Po eni strani s substitucijo $(x, y) \rightarrow (a, b + c + f(c))$ dobimo

$$f(a + b + c + f(c) + f(b + c + f(c))) = f(a) + 2b + 2c + 2f(c),$$

po drugi pa velja

$$\begin{aligned} f(a + b + c + f(c) + f(b + c + f(c))) &= f(a + b + c + f(c) + f(b) + 2c) \\ &= f(a + 3c + f(c) + b + f(b)) \\ &= f(a + 2c + c + f(c)) + 2b \\ &= f(a + 2c) + 2b + 2c, \end{aligned}$$

kjer smo zaporedoma uporabili začetno enačbo, specifično s substitucijami $(x, y) \rightarrow (b, c)$, $(x, y) \rightarrow (a + 3c + f(c), b)$ in $(x, y) \rightarrow (a + 2c, c)$. S primerjavo zgornjih enakosti tako dobimo, da je

$$f(a) + 2f(c) = f(a + 2c) \tag{1}$$

za vsa pozitivna realna števila a in c . Posebej velja

$$f(1) + 2f(x + y) = f(1 + 2x + 2y) = f(1 + 2x) + 2f(y) = f(1) + 2f(x) + 2f(y),$$

kjer smo večkrat uporabili enačbo (1), in sicer z zaporednimi substitucijami $(a, c) \rightarrow (1, x + y)$, $(a, c) \rightarrow (1 + 2x, y)$ in $(a, c) \rightarrow (1, x)$. Razberemo torej, da je $f(x + y) = f(x) + f(y)$ za vsa pozitivna realna števila x in y . Podobno kot pri prejšnji rešitvi zaključimo, da je f linearna.