3. izbirni test za MMO 2025

Ljubljana, 9. maj 2025

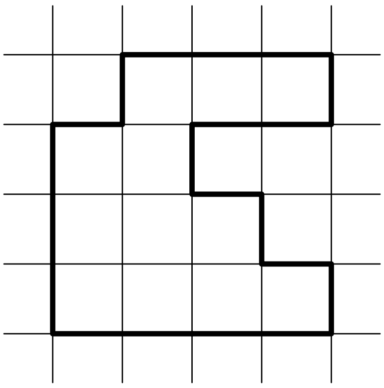
1. Določi vsa praštevila p, za katera obstajata taki naravni števili x in y, da velja
$$p + 49 = 2x^2 \quad \text{in} \quad p^2 + 49 = 2y^2.$$

2. Naj bo Ω očrtana krožnica trikotnika ABC. Naj bo ω krožnica, ki se od znotraj dotika krožnice Ω v točki A. Naj bosta P in Q dotikališči tangent iz B na krožnico ω, pri čemer P leži v notranjosti trikotnika ABC. Naj bosta R in S dotikališči tangent iz C na krožnico ω, pri čemer R leži v notranjosti trikotnika ABC.

   Dokaži, da se premici PS in QR sekata na simetrali kota $\angle BAC$.

3. Podana je neskončna kvadratna mreža. *Fronta* je sklenjena lomljena črta, ki ne seka in se ne dotika sama sebe, sestavljena iz končnega števila daljic, ki potekajo po stranicah kvadratne mreže in imajo oglišča v ogliščih kvadratne mreže. Pravimo, da je kvadrat mreže *mejen*, če katera izmed njegovih stranic leži na fronti, in *ogrožen*, če natanko tri izmed njegovih stranic ležijo na fronti. Z M in N zaporedoma označimo število mejnih in ogroženih kvadratov mreže. Na spodnji sliki je prikazan primer fronte, za katero je $M = 27$ in $N = 3$.

   Določi največje realno število c, za katerega je neenakost $M \geq cN$ izpolnjena za vse fronte.



Naloge rešuj samostojno. Za reševanje imaš na voljo 4 ure 30 minut.

Uporaba zapiskov, literature ali žepnega računala ni dovoljena.

Rešitve

1. Enostavno lahko preverimo, da je $p \geq 7$. Enačbi odštejemo in faktoriziramo, da dobimo
$$p(p-1) = 2(y+x)(y-x).$$
Sedaj ločimo dva primera:

   i) Velja $p \mid y - x$. Posebej, sledi $y > p$, zato lahko sklepamo
   $$p^2 + 49 = 2y^2 > 2p^2,$$
   oziroma $p < 7$, kar je protislovje.

   ii) Velja $p \mid x+y$. Analogno kot zgoraj lahko preverimo, da je $y \leq p$. Ker pa je $y > x$, sledi $x + y < 2y \leq 2p$, zato je edina možnost $x + y = p$. Tako dobimo
   $$p - 1 = 2y - 2x = 2p - 4x,$$
   oziroma $p = 4x - 1$. Sledi, da je
   $$4x + 48 = 2x^2,$$
   oziroma $(x-6)(x+4) = 0$. Ker je $x > 0$, sledi $x = 6$, in zato
   $$p = 2 \cdot 36 - 49 = 23,$$
   kar je res rešitev, saj je
   $$23^2 + 49 = 578 = 2 \cdot 17^2.$$

2. **1. način:** Naj bo D presečišče simetrale kota pri A in premice BC, in naj bosta M ter N drugi presečišči premic AB in AC s krožnico ω. Dovolj je pokazati, da D leži na premici PS. Simetrično bo namreč točka D ležala tudi na premici QR, kar pomeni, da se premici res sekata na simetrali kota pri $\angle BAC$.

   Naj bo X presečišče premic BP in CS. Uporabimo Menelajev izrek za trikotnik BCX in točke D, P ter S. Dokazujemo torej, da je
   $$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CS}{SX} \cdot \frac{XP}{PB} = -1.$$
   Zaradi pogoja, da P leži v notranjosti trikotnika ABC, točka S ne leži na daljici CX, točki P in D pa ležita na pripadajočih stranicah trikotnika. Predznaki se torej ujemajo, zato je dovolj preveriti, da je produkt razmerij dolžin enak 1.

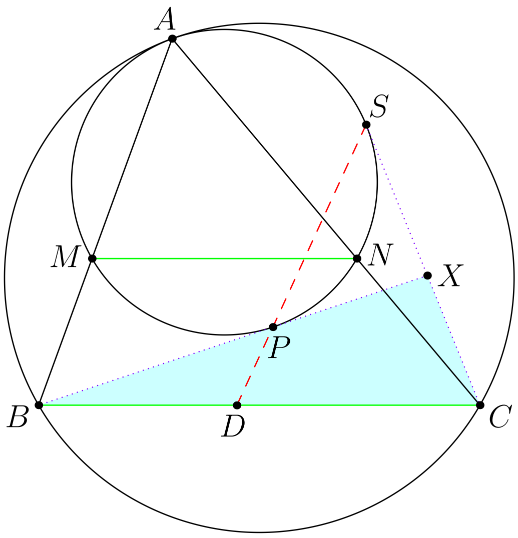
Sedaj se lotimo izračuna dolžin. Opazimo, da je $|XP| = |XS|$ zaradi enakosti dolžin tangentnih odsekov, po izreku o simetrali kota pa je $\frac{|BD|}{|DC|} = \frac{|AB|}{|AC|}$. Dovolj je torej pokazati, da je

$$\frac{|AB|}{|AC|} \cdot \frac{|CS|}{|BP|} = 1.$$

Po potenci točke B na krožnico ω ugotovimo, da je $|BP|^2 = |BM| \cdot |BA|$. Simetrično je tudi $|CS|^2 = |CN| \cdot |CA|$. Z uporabo Talesovega izreka o vzporednicah tako dobimo

$$\frac{|CS|^2}{|BP|^2} = \frac{|CN| \cdot |CA|}{|BM| \cdot |BA|} = \frac{|AC|^2}{|AB|^2},$$

kar smo želeli dokazati.



2. način: Nalogo rešimo z inverzijo v točki A. Za olajšanje notacije uporabimo zrcalno inverzijo, ki preslika B v N in C v M. Točki P' in Q' sta torej dotikališči krožnic skozi A in M s premico BC, točki R' in S' pa dotikališči krožnic skozi A in N s premico BC. Zaradi pogoja o legi P in R točki P' in R' ležita na daljici BC.

Podobno kot v prvi rešitvi naj bo D presečišče simetrale kota pri A s premico BC. Dokazujemo, da drugo presečišče krožnic APS in AQR leži na premici AD, zato zadošča, da D leži na potenčni premici teh dveh krožnic.

Računamo z usmerjenimi dolžinami. Dokazujemo torej enakost

$$DP' \cdot DS' = DQ' \cdot DR'.$$

Velja pa

$$\begin{aligned} DP' \cdot DS' &= (DB + BP') \cdot (DC + CS') \\ &= DB \cdot DC + BP' \cdot DC + DB \cdot CS' + BP' \cdot CS' \end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned} DQ' \cdot DR' &= (DB + BQ') \cdot (DC + CR') \\ &= DB \cdot DC + BQ' \cdot DC + DB \cdot CR' + BQ' \cdot CR'. \end{aligned}$$

Ker je $BP' = Q'B$ in $R'C = CS'$ (tangentni odseki točke na potenčni premici so enako dolgi), je tako dovolj dokazati

$$BP' \cdot DC + DB \cdot CS' = BQ' \cdot DC + DB \cdot CR',$$

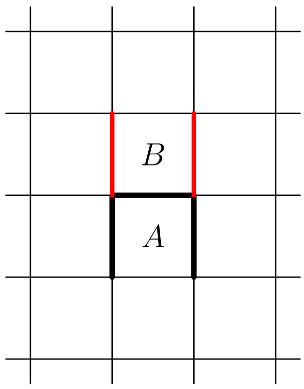
oziroma

$$|BP'| \cdot |DC| = |CR'| \cdot |DB|\,.$$

Iz potence točke B sledi, da je $|BP'|^2 = |BM| \cdot |BA|$. Sedaj zaključimo na enak način kot v prvi rešitvi z uporabo izreka o simetrali kota.

3. Trdimo, da je iskana vrednost $c = \frac{3}{2}$.

Oglejmo si poljuben ogrožen kvadrat A. Njegove stranice ležijo na treh zaporednih daljicah fronte. Oglejmo si kvadrat B, ki si s kvadratom A deli drugo izmed teh. Opazimo, da ni mogoče, da bi tudi B bil ogrožen – če bi katera izmed rdečih daljic na spodnji sliki ležala na fronti, bi ta namreč imela samopresečišča.

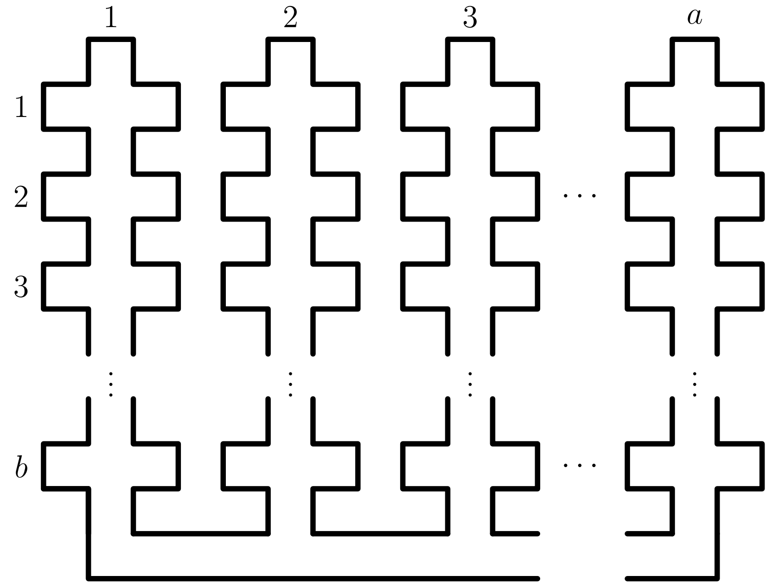


Na ta način lahko vsakemu ogroženemu kvadratu priredimo mejen neogrožen kvadrat. Vsak mejni kvadrat pa smo po definiciji priredili največ dvema ogroženima, saj ima tak kvadrat kvečjemu dve stranici na fronti. Tako sledi, da je

$$2 \cdot (M - N) \geq N,$$

oziroma $M \geq \frac{3}{2} \cdot N$.

Pokažimo še, da je to največja konstanta, ki jo lahko izberemo. Za to si oglejmo naslednjo fronto:



Celotna fronta se nahaja znotraj pravokotnika dimenzije $(4a-1)\times(2b+2)$. Izmed kvadratov v tem pravokotniku natanko $ab+(a-1)(b+1)$ ni mejnih, poleg tega pa imamo še $2b+a+4a-3$ mejnih kvadratov izven pravokotnika. Tako dobimo

$$M = (4a-1)(2b+2) - ab - (a-1)(b+1) + (2b+5a-3) = 6ab+12a+b-4.$$

Zdaj preštejmo še ogrožene kvadrate. Ni težko videti, da je teh

$$N = (a-2)\cdot(4b+1) + 2\cdot 4b = 4ab + a - 2.$$

Tako sledi, da je

$$\begin{aligned}
\frac{M}{N} &= \frac{6ab+12a+b-4}{4ab+a-2} - \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \\
&= \frac{12ab+24a+2b-8}{8ab+2a-4} - \frac{12ab+3a-6}{8ab+2a-4} + \frac{3}{2} \\
&= \frac{21a+2b-2}{8ab+2a-4} + \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

V posebnem primeru, ko je $a=b$, dobimo

$$\frac{M}{N} = \frac{23a-2}{8a^2+2a-4} + \frac{3}{2} \geq c.$$

Če je $c > \frac{3}{2}$, si lahko izberemo tak $a \in \mathbb{N}$, da je $\frac{23a-2}{8a^2+2a-4} < c - \frac{3}{2}$, od koder sledi protislovje. Največja možna vrednost števila c je tako res $\frac{3}{2}$.