

Priprave na MMO 2026 – 2. domača naloga

1. V zbirki 3^n gumijastih račč imamo $3^n - 1$ enako težkih račč in eno, ki tehta več kot ostale. V enem tehtanju na vsako stran ravnovesne tehtnice postavimo poljubno skupino račč in primerjamo njuni teži. Dokaži, da lahko v n tehtanjih ugotovimo, katera račka je težja od ostalih.
2. Na teniškem turnirju je nastopilo n igralcev. Vsak od njih je natanko enkrat igral z vsakim drugim igralcem in bodisi zmagal bodisi izgubil. Dokaži, da lahko igralce razporedimo v vrsto tako, da je vsak igralec premagal svojega desnega soseda.
3. V krogu sedi n deklet in n fantov. Izmed njih izberemo eno osebo, ki prva vstane, nato pa osebe po vrsti vstajajo v smeri urinega kazalca. Dokaži, da lahko vedno izberemo prvo osebo tako, da v vsakem trenutku stoji vsaj toliko fantov kot deklet.
4. Naj bo n naravno število. Jež se v $4n$ korakih premakne od točke $(0, 0)$ do točke $(2n, 2n)$ na koordinatni mreži, pri čemer se v vsakem koraku premakne za eno enoto navzgor ali v desno. Pot, ki jo jež opravi, razdeli kvadrat z oglišči $(0, 0)$, $(2n, 0)$, $(2n, 2n)$ in $(0, 2n)$ na dve območji. Pri tem je lahko eno izmed območij tudi prazno. Dokaži, da je število poti, ki razdelijo kvadrat na dve območji s sodo ploščino, enako

$$\frac{\binom{4n}{2n} + \binom{2n}{n}}{2}.$$

Naloge rešujte samostojno. Pisne rešitve je potrebno poslati najkasneje do **30. 11. 2025** preko e-maila na naslov **priprave.mmo@gmail.com**. Zadeva elektronskega sporočila naj vsebuje niz »2. domača naloga«, nalogo pa oddajte v eni pdf datoteki.

Rešitvam priložite tudi podpisano izjavo o samostojnem delu. Če boste pri reševanju nalog uporabili kakšno literaturo (v tiskani ali elektronski obliki), navedite reference.

Izjava o samostojnem delu

Spodaj podpisani/a _____
ime in priimek
samostojno in brez pomoči drugih oseb.

izjavljam, da sem vse naloge reševal/a

kraj in datum

Podpis:

Rešitve

1. Najprej dokažimo trditev za $n = 1$. Izberemo dve izmed treh račč in ju postavimo na ravnovesno tehtnico. V primeru, da se tehtnica prevesi v eno smer, vemo, da je račka na tisti strani težja od ostalih dveh račč. Če tehtnica ostane v ravnovesju, sta rački, ki smo ju postavili na tehtnico, enako težki, torej je tretja račka težja od ostalih dveh. V zbirki treh račč lahko res z enim tehtanjem najdemo težjo račko.

Predpostavimo, da lahko v zbirki 3^k račč v k tehtanjih ugotovimo, katera račka je težja od ostalih. Če zbirko 3^{k+1} račč razdelimo v tri skupine po 3^k račč, lahko dve izmed teh skupin primerjamo na ravnovesni tehtnici. Podobno kot pri bazi indukcije ugotovimo, da če je tehtnica v ravnovesju, je težja račka v skupini, ki je nismo tehtali, če pa se tehtnica prevesi na eno stran, je težja račka v skupini na tej strani. Da najdemo skupino 3^k račč, ki vsebuje težjo račko, potrebujemo eno tehtanje. Po induksijski predpostavki lahko sedaj v tej skupini najdemo težjo račko v k tehtanjih. Skupaj tako račke res tehtamo $(k+1)$ -krat.

2. Če je nastopil le en igralec, trditev očitno drži. V primeru, da sta nastopila dva igralca, je natanko eden izmed njiju zmagal. Igralca, ki je izgubil, lahko postavimo na desno stran od zmagovalca. Dokazali smo trditev za $n = 1$ in $n = 2$.

Predpostavimo, da lahko k igralcev vedno postavimo v vrsto na opisan način, in trditev dokažimo še za $k + 1$. Izberimo enega izmed $k + 1$ igralcev in ga označimo z A . Po induksijski predpostavki lahko preostalih k igralcev postavimo v vrsto tako, da je vsak premagal svojega desnega sosedo. Poglejmo, kaj se zgodi, ko poskusimo v vrsto dodati še igralca A .

Če igralec A ni premagal nobenega drugega igralca, ga lahko postavimo na skrajno desno mesto v vrsti, saj bo v tem primeru res veljalo, da je igralec na mestu k premagal svojega desnega sosedo. Po induksijski predpostavki vemo, da to velja tudi za vse ostale, zato ta postavitvev ustreza pogoju.

Denimo torej, da je igralec A premagal vsaj enega drugega igralca. Naj bo B prvi igralec v vrsti z leve proti desni, ki ga je A premagal. Igralca A sedaj v vrsto vrinemo tik na levo stran igralca B . Če je B bil na skrajnem levem mestu v vrsti, bo sedaj igralec A bil na skrajno levem mestu, sicer pa ga bomo postavili nekam v sredino vrste. Preveriti moramo še, da ta postavitvev ustreza pogoju. Zaradi induksijske predpostavke zadošča preveriti le sosede igralca A . Seveda je A premagal svojega desnega sosedo. Po izbiri igralca B vemo, da je A izgubil tekme proti vsem, ki v vrsti stojijo na njegovi levi strani. Sledi, da je levi sosed igralca A (če ta obstaja) prav tako premagal svojega desnega sosedo. Postavitvev je tako res ustrezna.

3. Če v krogu sedita le eno dekle in en fant, lahko prvi vstane fant, nato pa še dekle, kar dokaže bazo indukcije.

Predpostavimo, da trditev velja za k deklet in k fantov. V krogu, v katerem je $k + 1$ oseb vsakega spola, lahko najdemo fanta, ki ima na svoji levi dekle. Tega fanta in to dekle odstranimo iz kroga. Ostale osebe, posedene enako kot prej, tvorijo krog s k fanti in k dekleti. Po induksijski predpostavki lahko izberemo osebo A , ki prva vstane, tako, da v vsakem trenutku stoji več fantov kot deklet.

Dodajmo odstranjen par nazaj na svoje mesto in premislimo, da bo vstajanje ustrezno, če

začne oseba A . V trenutku, ko pridemo do fanta, ki smo ga prej odstranili, po predpostavki stoji vsaj toliko fantov kot deklet. Ko vstane fant, vemo, da stoji strogo več fantov kot deklet, zato bo tudi, ko vstane dekle, stalo vsaj toliko fantov kot deklet. V nadaljevanju bo po indukcijski predpostavki vstajanje prav tako ustrezno – v primerjavi z indukcijsko predpostavko stojita po en fant in dekle več, kar pomeni, da se neenakost ohranja.

4. Ločimo primere glede na to, na kak način se jež premakne v prvih dveh korakih. Če se jež najprej premakne za dva koraka v desno, bo v nadaljevanju moral prehoditi še pravokotnik velikosti $(2n - 2) \times 2n$. Podobno, če se premakne za dva koraka gor, bo moral kasneje prehoditi še pravokotnik velikosti $2n \times (2n - 2)$. Ker v nadaljevanju ne dobimo nujno kvadrata, bomo dokazali bolj splošno trditev, to je, da je število poti, ki pravokotnik velikosti $2m \times 2n$ razdelijo na dve območji s sodo ploščino, enako

$$a_{2m,2n} = \frac{\binom{2m+2n}{2m} + \binom{m+n}{m}}{2}.$$

Indukcijo bomo delali po vsoti $m + n$. Denimo, da velja $m + n = 1$. Brez škode za splošnost naj bo $m = 1$ in $n = 0$. To pomeni, da se lahko jež premakne le za dve enoti v desno, njegova pot pa porodi veljavno razdelitev.

Predpostavimo, da trditev velja za vse pravokotnike, za katere velja $m + n < k$. Dokazati želimo, da velja tudi za pravokotnike z $m + n = k$.

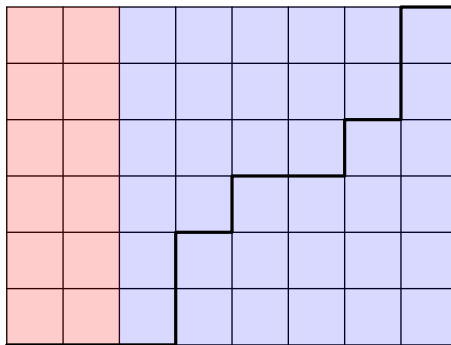
Denimo, da se jež v prvih dveh korakih premakne desno. To pomeni, da bo pravokotnik z oglišči $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(2, n)$ in $(0, n)$ v celoti ležal v enem izmed dveh območij, njegova ploščina pa bo soda. Pogoju iz naloge bodo torej ustrezale natanko vse poti, ki pravokotnik z oglišči $(2, 0)$, $(m, 0)$, (m, n) in $(2, n)$ razdelijo na dve območji s sodo ploščino. Ker je ta pravokotnik velikosti $(2m - 2) \times 2n$, po indukcijski predpostavki vemo, da je ustreznih poti

$$a_{2m-2,2n} = \frac{\binom{2(m-1)+2n}{2(m-1)} + \binom{(m-1)+n}{m-1}}{2}.$$

Podoben premislek velja, če začnemo z dvema korakoma gor. V tem primeru dobimo

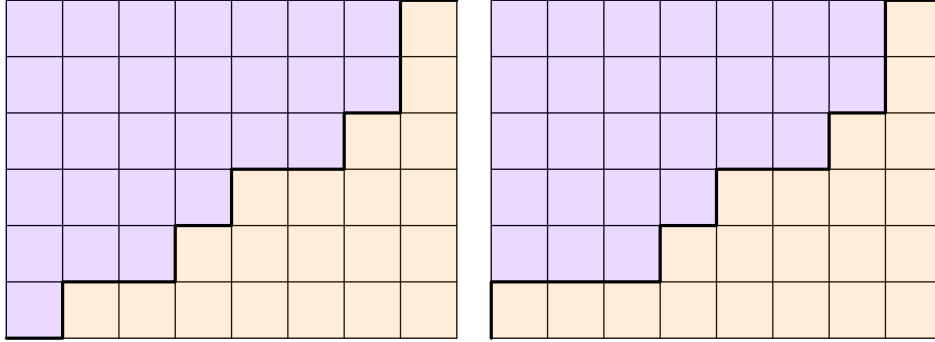
$$a_{2m,2n-2} = \frac{\binom{2m+2(n-1)}{2m} + \binom{m+(n-1)}{m}}{2}$$

ustreznih poti.



Slika 1: Na modrem pravokotniku lahko uporabimo indukcijsko predpostavko

Ostane nam še primer, ko jež v prvih dveh korakih izbere dve različni smeri. V tem primeru je po dveh korakih na točki $(1, 1)$. Poglejmo poljubno ježevo pot od točke $(1, 1)$ do točke $(2m, 2n)$. Ta pot je drugi del natanko dveh različnih poti od točke $(0, 0)$ do točke $(2m, 2n)$. Razlika med njima je le v tem, kateremu izmed dveh območij bo pripadal kvadrat z oglišči $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ in $(0, 1)$, če pa območju odvzamemo ali dodamo en tak kvadratega, se bo parnost njegove ploščine spremenila. Ker ima pravokotnik velikosti $2m \times 2n$ sodo ploščino, ga bo ježeva pot razdelila na bodisi dve območji s sodo ploščino bodisi dve območji z liho ploščino, zato bo natanko ena izmed opisanih poti ustrezna.



Slika 2: Če zamenjamo prva dva koraka, spremenimo parnost ploščin

Dovolj je torej prešteti vse možne poti v pravokotniku velikosti $(2m - 1) \times (2n - 1)$, ki jih je

$$b_{2m-1,2n-1} = \binom{2m+2n-2}{2m-1}.$$

Število poti, ki razdelijo pravokotnik na dve območji s sodo ploščino, je enako

$$a_{2m,2n} = a_{2m-2,2n} + a_{2m,2n-2} + b_{2m-1,2n-1}.$$

Ko vstavimo rezultate od prej in s pomočjo Pascalove identitete preoblikujemo izraz, dobimo

$$\begin{aligned} a_{2m,2n} &= \frac{\binom{(2m-2)+2n}{2m-2} + \binom{(m-1)+n}{m-1}}{2} + \frac{\binom{2m+(2n-2)}{2m} + \binom{m+(n-1)}{m}}{2} + \binom{2m+2n-2}{2m-1} \\ &= \frac{\binom{2m+2n-2}{2m-2} + \binom{2m+2n-2}{2m-1}}{2} + \frac{\binom{2m+2n-2}{2m-1} + \binom{2m+2n-2}{2m}}{2} + \frac{\binom{m+n-1}{m-1} + \binom{m+n-1}{m}}{2} \\ &= \frac{\binom{2m+2n-1}{2m-1}}{2} + \frac{\binom{2m+2n-1}{2m}}{2} + \frac{\binom{m+n}{m}}{2} \\ &= \frac{\binom{2m+2n}{2m} + \binom{m+n}{m}}{2}. \end{aligned}$$

S tem je indukcija končana. Za $m = n$ dobimo natanko rezultat, ki ga zahteva naloga.